目　录

一　竞赛试题

中国1981年二十五省市自治区中学数学竞赛试题

〔1981年10月18日〕

①　下面七个题目各提出四个答案，将你认为正确的答案的英文字母代号填写在题后的括号内。每一题，填对得5分，填错得－2分，不填得0分。

一、条件甲：两个三角形的面积和两条边对应相等。

条件乙：两个三角形全等。

(A)甲是乙的充分必要条件；　(B)甲是乙的必要条件；

(C)甲是乙的充分条件；

(D)甲不是乙的必要条件，也不是充分条件。

（　）

二、设$\alpha \neq \frac{k\pi}{2}$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots)$。$T=\frac{\sin\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}$

(A) T取负值；　(B) T取非负值；

(C) T取正值；　(D) T取值可正可负。

（　）

三、条件甲：$\sqrt{1+\sin\theta}=a$

条件乙：$\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}=a$。

(A) 甲是乙的充分必要条件；　(B) 甲是乙的必要条件；

(C) 甲是乙的充分条件；

(D) 甲不是乙的必要条件，也不是充分条件。

( )

四、下面四个图形中，哪一个面积最大？

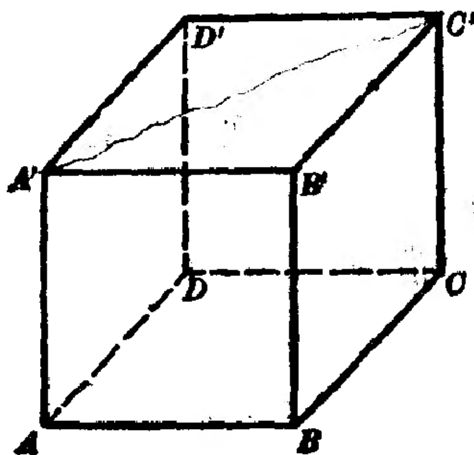
(A) $\triangle ABC$：$\angle A=60^\circ$，$\angle B=45^\circ$，$AC=\sqrt{2}$；

(B) 梯形：两对角线长度分别为$\sqrt{2}$和$\sqrt{3}$，夹角为75°；

(C) 圆：半径为1；　　(D) 正方形：对角线的长度是2.5.

( )

五、给出长方体$ABCD-A'B'C'D'$，下列十二条直线：AB'，BA'，CD'，DC'，AD'，DA'，BC'，CB'，AC，BD，$A'C'$，$B'D'$中有多少对异面直线？



(A) 30对；　　(B) 60对；

(C) 24对；　　(D) 48对。

( )

六、在坐标平面上有两个区域M和N，M是由$y\geqslant 0$，$y\leqslant x$和$y\leqslant 2-x$这三个不等式确定的。N是随t变化的区域，它由不等式$t\leqslant x\leqslant t+1$所确定的，$t$的取值范围是$0\leqslant t\leqslant 1$，设$M$和$N$的公共面积是函数$f(t)$，则$f(t)$为

(A) $-t^2+t+\frac{1}{2}$；　　(B) $-2t^2+2t$；

(C) $1-\frac{1}{2}t^2$；　　(D) $\frac{1}{2}(t-2)^2$.　　( )

七、对方程$x|x|+px+q=0$进行讨论，下面的结论中，哪一个是错误的？

(A) 至多有三个实根；　　(B) 至少有一个实根；

(C) 仅当$p^2-4q\geqslant 0$时才有实根；

(D) 当$p<0$和$q>0$时，有三个实根。

( )

(本题共35分)

② 下列表中的对数值有两处是错误的，请予纠正。

x	$\lg x$
0.021	$2a+b+c-3$
0.27	$6a-3b-2$
1.5	$3a-b+c+1$
2.8	$1-2a+2b-c$
3	$2a-b$
5	$a+c$

x	$\lg x$
6	$1+a-b-c$
7	$2(b+c)$
8	$3-3a-3c$
9	$4a-2b$
14	$1-a+2b$

(本题15分，宁夏供题。)

③ 在圆O内，弦CD平行于弦EF，且与直径AB交成45°角。若CD与EF分别交直径于P和Q，且圆O的半径长为1、求证

$$PC\cdot QE+PD\cdot QF<2.$$

(本题15分，河南供题。)

④ 组装甲、乙、丙三种产品，需用A、B、C三种零件，每件甲产品需用A、B各2个；每件乙产品需用B、C各1个；每件丙产品需用2个A和1个C、用库存的A、B、C三种零件，如组装成p件甲产品、q件乙产品和r件丙产品，则剩下2个A零件和1个B零件，但C零件恰好用完。试证无论怎样改变产品甲、乙、丙的件数，也不能把库存的A、B、C三种零件都恰好用完。

(本题15分，北京供题。)

⑤ 一张台球桌形状是正六边形$ABCDEF$。一个球从AB的中点p击出，击中BC边上的某点Q，并且依次碰击CD、DE、

EF、FA各边，最后击中AB边上的某点。设$\angle BPQ=\theta$，求θ的取值范围。

〔提示：利用入射角等于反射角的原理。〕

（本题20分，福建供题。）

北京市1981年中学数学竞赛

〔1981年3月22日〕

初三年级试题

① 一个自然数减去45后是一个完全平方数，这个自然数加上44后仍是一个完全平方数，试求这个自然数。 （15分）

② 正方形$ABCD$中，E是CD的中点，F是DA的中点，连结BE、CF，它们相交于P。求证：$AP=AB$ （15分）

③ 设 $\dfrac{1}{3-\sqrt{7}}$ 的整数部份是a，小数部份是b。试求$a^2+(1+\sqrt{7})ab$之值 （15分）

④ 已知三角形中两角之和为$n°$，最大角比最小角大24°，求n的取值范围。 （15分）

⑤ 试将3、4、5、6、7、8、9七个数字分成两组，分别排列成一个三位数和一个四位数，并且使这两个数的乘积为最大。问：应如何分组排列？并证明你的结论。 （20分）

⑥ 如果正整数N($N>1$)的正约数的个数是奇数，求证：N是完全平方数。 （20分）

高一年级试题

① 解不等式

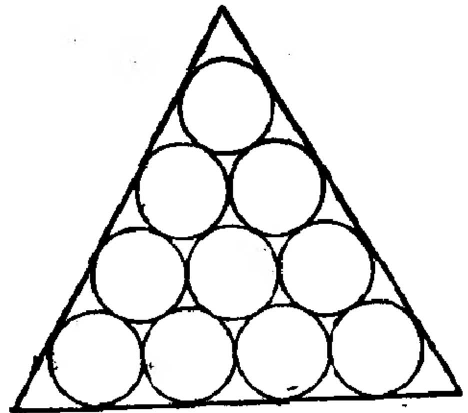
$$\log_{0.01}\log_{6}\frac{x-8}{x-3}<0 \qquad (10分)$$

② 已知$\triangle ABC$中，

$(\cos A+\sin A)(\cos B+\sin B)=2$，求角$A$、$B$、$C$。

（10分）

③ 在一边长为l的等边三角形内部放置十个相等的圆（见图），相邻的两圆互相外切，外围的圆都与三角形的边相切。试求这十个等圆的面积之和。（10分）



④ 以一底角为67.5°的等腰梯形$ABCD$一腰BC为直径作圆，交大底AB于E，且恰与另一腰AD相切于M。求$BE:AE$之值。

（15分）

⑤ 建造一矩形水池，长度每尺造价27元，宽度每尺造价35元，按照施工要求，长度与宽度的尺数必须是整数。根据预算1000元的建造费，建成的水池最大面积是多少？（15分）

⑥ 圆的内部有四个点，任何两点的距离都大于圆的半径。试证：总能找到两条互相垂直的直径，将圆分为四个部份，使每部份的内部有、而且仅有一点。（20分）

⑦ 设$f(x)=ax^2+bx+c$。已知$f(1)$、$f(2)$、$f(3)$、$f(4)$、$f(5)$都是素数。求证：$f(x)$不能分解成两个整系数一次式的积。（20分）

上海市1981年中学数学竞赛

初 赛 试 题

① 已知 $f(x)=1+\log_x 5$，$g(x)=1+\log_{x^2}9+\log_{x^3}8$。试比较$f(x)$和$g(x)$的值的大小。 （10分）

② 在$\triangle ABC$中，$\angle C$是钝角，AB边上的高为 h。求证：$AB>2h$。 （10分）

③ 已知正四棱锥$p-ABCD$的侧面与底面的夹角α，相邻两侧面的夹角β。求证：$\cos\beta=-\cos^2\alpha$ （12分）

④ 设
$$\sum_{m=1}^{n}\left\{\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{2}{j}\sum_{k=1}^{i}k\right)\right\}=275.$$
求正整数 n 的值。

$\left(\text{注：}\sum_{i=1}^{n}a_i\text{是}\quad a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n\text{的缩写记号。}\right)$

⑤ 设 n 为偶数。试证： （12分）

$$\frac{1}{1!(n-1)!}+\frac{1}{3!(n-3)!}+\frac{1}{5!(n-5)!}+\cdots\cdots+\frac{1}{(n-1)!1!}=\frac{2^{n-1}}{n!}.$$ （12分）

⑥ 设抛物线的对称轴是 $2x+y-1=0$，准线是$x-2y-5=0$，且与直线$2y+3=0$相切。求此抛物线方程。

（14分）

⑦ 已知 $x^3+x^2\sin\theta+x\sin2\theta+\sin3\theta=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$，且
$$\begin{vmatrix}\alpha & \beta & \gamma\\ \gamma & \alpha & \beta\\ \beta & \gamma & \alpha\end{vmatrix}>0.$$

求θ的取值范围。（15分）

⑧ 已知复数z_1，z_2，z_3，它们有$|z_1|=1$，$|z_2|=k$，$|z_3|=2-k$；$\arg z_1=\alpha$，$\arg z_2=\beta$，$\arg z_3=\gamma$，

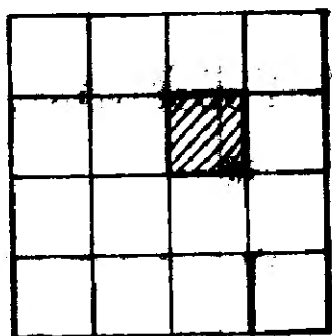
且 $$z_1+z_2+z_3=0。$$

问：k取何值时，$\sin^2(\beta-\gamma)$的值为最大？（15分）

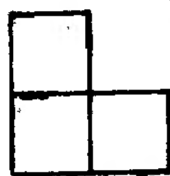
复赛试题

① 设n是正整数，k是不小于2的整数。试证n^k可以表示成n个相继的奇数之和。（14分）

② 试证在$2^n\times 2^n$（n是自然数）个相等小方格组成的棋盘上任意挖去一个小方格（如图a）后，总可以用由三个小方格构成的L形块（如图b）恰好铺满（既不重叠，也不越界）。（14分）



图a



图b

③计算$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\dfrac{3^3-1}{3^3+1}\cdot\cdots\cdots\cdot\dfrac{n^3-1}{n^3+1}\right)$。

（14分）

④在方程组

$$\begin{cases}ax_1^4+bx_1^3=x_2^2,\\ ax_2^4+bx_2^3=x_3^2,\\ ax_3^4+bx_3^3=x_4^2,\\ ax_4^4+bx_4^3=x_1^2,\end{cases}$$

中　　a，b是实数，且$a\neq 0$。

求证：（i）当$b^2+4a\geqslant 0$时，方程组至少有一组非零实数解；

（ii）当$b^2+4a<0$时，方程组不存在非零实数解。

（18分）

⑤已知边长为1的正方体$ABCD—A'B'C'D'$，AC'是对角线，M、N分别是BB'、$B'C'$的中点，P是线段MN的中点。求：DP与AC'间的距离。（20分）

⑥设一圆和一条等轴双曲线交于四点A_1、A_2、A_3和A_4，其中A_1和A_2是圆的直径的一对端点。求证：

（i）A_3和A_4是双曲线直径的端点；

（ii）双曲线在A_3和A_4处的切线垂直于A_1A_2。

（20分）

第二十二届国际数学竞赛试题

第　一　试

〔1981年7月13日（星期一）上午，四小时半于美国华盛顿〕

①P是一给定三角形ABC之内的一点。D，E，F是由P分别向BC，CA，AB作垂线的垂足。求出所有使

$$\frac{BC}{PD}+\frac{CA}{PE}+\frac{AB}{PF}$$

达到最小的P点。（英国，7分）注

②有集合$\{1,2,\cdots\cdots,\ n\}$。今考虑其所有有r个元素的子集；其中$1\leqslant r\leqslant n$。再在这些子集的每一个中取其最小数，用$F(n,r)$记这些最小数的算术平均值。证明：

〔注〕括号内的国家与分数分别是该题的命题国与该题所占的分数。

$$F(n,r)=\frac{n+1}{r+1}$$

（西德，7分）

③决定m^2+n^2的最大值，其中

$m, n\in\{1,2,\cdots\cdots, 1981\}$,

同时 $(m^2-mn-n^2)^2=1$。

（荷兰，7分）

第　二　试

〔1981年7月14日（星期二）上午，四小时半于华盛顿〕

④（i）n为一大于2的自然数．问n为何值时，存在n个逐个相连的正整数，使其最大数是其余$n-1$个数的最小公倍数的一个因子？

（ii）问n为何值时，仅仅存在唯一的一串这样相连的n个数？

（比利时，7分）

⑤在一个给定的三角形内有三个半径相同的圆，它们有一个公共的交点O、这三个圆中每一个至少要和这三角形的两条边相切．证明：O点、此三角形的内心（内切圆心）和外心（外接圆心）是在一条直线上．

（苏联，7分）

⑥函数$f(x,y)$满足：对所有非负整数x,y有

（i）$f(0,y)=y+1$，　　（ii）$f(x+1,0)=f(x,1)$，

（iii）$f(x+1,y+1)=f(x,f(x+1,y))$。求$f(4,1981)$。

（芬兰，7分）

美国1981年（第十届）数学竞赛试题

〔1981年5月5日，三小时半〕

①有一给定的角，其大小为$\frac{180^\circ}{n}$，这里n是一个不能被3除尽的正整数。证明：此角可以用直尺和圆规三等分。

②某县共有若干个区，其中每两个区之间可以用汽车、火车或飞机这三种方式之一进行交通联系。但是没有一个区在与其它所有的区交通联系时，这三种方式(指汽车、火车与飞机)是都用上了的，但就整个县而言，这三种方式都是用上了的；同时也没有这样的三个区：它们之间两两进行交通联系时，用的都是同一种方式。问：这个县内至多有多少个区？

③若A、B、C是一个三角形的三个内角，证明：

$$-2\leqslant Sin3A+Sin3B+Sin3C\leqslant 3\sqrt{3}/2.$$

并问：何时上述不等式之间的等号成立？

④有一凸多面角，其所有面角之和等於其所有两面角之和、证明：此多面角是一个三面角

（注：一个凸多面角可以以如下方式形成：从一个凸多边形所在的平面外一点引过此凸多边形各顶点的射线。）

⑤若x是一个正实数，n是一个正整数，证明

$$[nx]\geq\frac{[x]}{1}+\frac{[2x]}{2}+\frac{[3x]}{3}+\cdots\cdots+\frac{[nx]}{n},$$

这里$[t]$表示不大於t的最大整数，例如$[\pi]=3$，$[\sqrt{2}]=1$。

加拿大1981年（第十三届）数学竞赛试题

〔1981年5月6日，三小时〕

①对任何实数 t，用〔t〕表示它所包含的最大整数（即小於或等於 t 的最大整数）. 如〔8〕= 8，〔π〕= 3和〔$-5/2$〕= -3. 证明方程

〔x〕+〔$2x$〕+〔$4x$〕+〔$8x$〕+〔$16x$〕+〔$32x$〕= 12345 无实数解.

②已知一半径为 r 的圆以及过该圆上某定点 P 的切线 l. 现有圆周上的动点 R 向切线 l 作垂直线，其垂足为 Q. 请决定三角形 PQR 的最大面积

③如果在平面 P 上有有限条直线，请证明：一定可以在平面 P 上作一个任意大的圆，使它和那有限条直线都不相遇. 另一方面，请证明：我们总可以构造一个直线的序列（即第一条直线，第二条直线，第三条直线，……），使得平面 P 上的每一个圆都至少和这些直线中的某一条相遇.（一个点不认为是一个圆.）

④$p(x)$ 和 $Q(x)$ 是两个多项式，它们满足恒等式

$p(Q(x)) \equiv Q(p(x))$，对所有实数 x 成立. 如果方程

$$p(x) = Q(x)$$

无实数解，那么请证明方程

$$p(p(x)) = Q(Q(x))$$

也没有实数解.

⑤有11个剧团参加一次戏剧汇演. 这些剧团中每天有若干剧团登台演出，而另外的剧团作为观众观摩演出. 在汇演结束时，每一个剧团至少看到其它每一个剧团的演出一次. 问：这次汇演至少持续了多少天？

澳大利亚1981年（第一届）数学竞赛试题

第　一　试

〔1981年 4 月 7 日，四小时〕

①(*a*)证明：由小於100的27个不同的奇数所组成的集合中，必定有一对数，其和为102。

(*b*)若一集合由小於100的26个不同的奇数所组合，并且此集合中没有一对数的和为102。问：这种集合总共有多少个？

②如果 n 是正整数，α和x是实数。那末在

$$0<\alpha<1 \quad 且 \quad \alpha^{n+1}\leqslant x\leqslant 1$$

时，有

$$\frac{(x-\alpha)}{(x+\alpha)}\cdot\frac{(x-\alpha^2)}{(x+\alpha^2)}\cdot\frac{(x-\alpha^3)}{(x+\alpha^3)}\cdots\cdots\frac{(x-\alpha^n)}{(x+\alpha^n)}\leqslant p,$$

此处

$$p=\frac{(1-\alpha)}{(1+\alpha)}\cdot\frac{(1-\alpha^2)}{(1+\alpha^2)}\cdot\frac{(1-\alpha^3)}{(1+\alpha^3)}\cdots\cdots\frac{(1-\alpha^n)}{(1+\alpha^n)}.$$

③有一等腰三角形ABC。O是底边BC的中点。一个圆以O点为圆心并且与腰AB、AC相切，而P、Q是腰AB和AC上的两点。

如果PQ是上述圆的切线，那末

$$PB\times CQ=\left(\frac{1}{2}BC\right)^2.$$

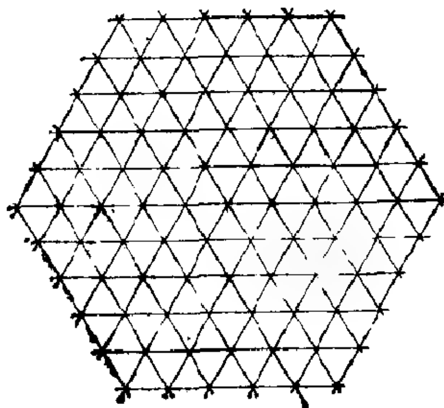
其逆成立吗？

第 二 试

〔1981年4月8日，四小时〕

④证明从1066到1981之间的每一个数都是下列数的一个因子：

$$
\begin{aligned}
&1\times2\times3\times\cdots\times915\\
+&2\times3\times4\times\cdots\times916\\
&\vdots\qquad\quad\vdots\qquad\vdots\\
+&1066\times1067\times1068\times\cdots\times1980.
\end{aligned}
$$



⑤平面被上图中的三族平行线切割成许多等边三角形。设这每个等边三角形的边长为1。证明：平面上任意两个顶点间的距离所构成的集合是"可乘的"。这就是说，如果u和v都分别是上述的那种距离，那末他们的乘积uv亦是$\sqrt{1981}$（$=44.508\cdots$），是这种距离吗？

⑥在两个弓箭手B和C之间展开比赛．他们每人都持有一箭，而且同时从原点$x=0$处出发，向目标$x=1$处走去。而B和C每人究竟在何处发射这一箭，由他们每人自己选择。弓箭手B比弓箭手C功夫较差，因为C从x处射中目标$x=1$的概率是x，而B则是x^2。在比赛中还规定，如果两人都射中目标，那末先射箭者为胜。问：B的最佳对策是何？

西德1981年数学竞赛试题

第　一　试

①设 a 和 n 皆为自然数，而且

$$S=a+a^2+a^3+\cdots\cdots+a^n.$$

证明：S 用十进制数表达时，其个位数是1的充分必要条件是：a和n的十进制数表达式其个位数都是1.

②若一个三角形中三边之长a、b与c满足

$$a+b=2c.$$

再若G和I分别是此三角的重心（三条中线的公共交点）和内心(内切圆心)，那末GI一定与此三角形三边之一平行.

③试证在$2^n\times 2^n$ (n是自然数）个相等小方格组成的棋盘上任意挖去一个小方格（如图a)后，总可以用由三个小方格构成的L形块（如图b）恰好铺满（既不重叠，也不越界).

注：本题的图见上海市1981年中学生数学竞赛复赛试题第2题。

④若p是一素数，那末

$$2^p+3^p$$

不能被表示为n^k的形式，其中n、k均为自然数，而且$k>1$。

第　二　试

①今有一数列

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots\cdots.$$

其中a_1是一自然数，而

$$a_{n+1}=[1.5\times a_n]+1,\ 对所有自然数n成立.$$

问：是否可以如此选定a_1，使此数列的前100000项全是偶数，

而第100001项则为奇数?

②如果一个平面到其自身上的一一映射将每一个圆变换为一个圆．证明：该变换一定将每一条直线变换为一条直线．

〔附注　一个平面到其自身上的一一映射是这样一种映射，它满足：

（Ⅰ）将平面上的每一个点唯一地映照为平面上的某一点；

（Ⅱ）不同的点映照为不同的点；

（Ⅲ）平面上每一点都是某一点的象点．〕

③ k 是一自然数，$n=2^{k-1}$．求证：从$2n-1$个自然数中总可选出 n 个数，使其和可被 n 除尽．

④若M是自然数的某一非空集合，且对每一$x\in M$，一定有$4x\in M$和$[\sqrt{x}]\in M$．求证集合M为所有自然数的集合．

比利时1981年（第六届）数学竞赛试题

〔1981年3月11日，四小时〕

①证明：如果 n 是自然数，那末多项式

$$(x+1)^{2n+1}+x^{n+2}$$

可被

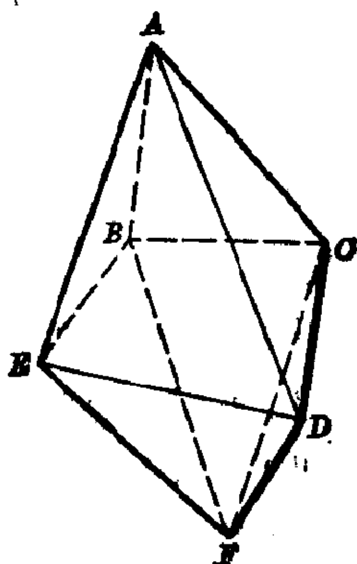
$$x^2+x+1$$

除尽．

②在一个半径为R的圆形饼上割下一个圆心角为$\alpha(0<\alpha<2\pi)$的扇形．再用一个圆形的碟子来盛放这个扇形的饼．设这种碟子中最小的一个其半径为γ．请写出这个作为R和α的函数γ的具体表达式．

③在一个八面体$ABCDE$（不一定是正八面体）中，四边形$BCDE$、$ACFE$和$ABFD$中每一个都在一个平面上，而且都将此八面体的其余两个顶点分在平面的两侧．（见图）

问：直线AF、BD和CE是否总是有一个公共的交点．



④两个赌徒A和B正在看一个小孩不停顿地掷一枚硬币．如果硬币着地时正面朝天，则记为H；反面朝天，则记为T．这样，在三次连连的抛掷中，一定是下列8种排列之一：

TTT，TTH，THT，HTT，THH，HTH，HHT，HHH．

赌徒A打赌说：在接连的抛掷中，THT一定比TTT先出现．赌徒B却打赌说TTT要比THT要先出现．

问：这两个赌徒中哪一个赢的可能性大些？

奥地利1981年数学奥林匹克

第　一　试

〔1981年6月1日〕

①设在一三角形中，s_a、s_b、s_c为其三条中线的长度，s为此三角形周长之半．证明：

$$S^2 \leqslant S_a^2 + s_b^2 + s_c^2.$$

并问上述不等式中的等号何时成立？

②问自然数n为何值时，

$$(x^2+x+1) \mid [x^{2n}+1+(x+1)^{2n}].$$

③设自然数$n \geqslant 3$．又设实数a、b、c满足

$$a+b+c=0.$$

求下列不等式组的全部解$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$：

$$\begin{cases} ax_1+bx_2+cx_3\geqslant 0, \\ ax_2+bx_3+cx_4\geqslant 0, \\ \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \\ ax_{n-1}+bx_n+cx_1\geqslant 0, \\ ax_n+bx_1+cx_2\geqslant 0, \end{cases}$$

其中$x_i(1\leqslant i\leqslant n)$是实数。

第 二 试

〔1981年 6 月 2 日〕

④设数列$\{a_n\}$为

$$(a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots\cdots)$$
$$=(1,\ 3,\ 3,\ 3,\ 5,\ 5,\ 5,\ 5,\ 5,\ 7,\ \cdots\cdots),$$

即每一个奇数k必定重现k次。

证明：存在整数b、c、d使

$$a_n=b\times[\sqrt{n+c}]+d, \qquad (n\geqslant 1)。$$

而且只能有一组b、c、d的值满足上式。

⑤n为自然数，问：n取何值时

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 \,\Big|\, n!。$$

⑥试证下列方程组没有整数解(即x,y,z均为整数)：

$$\begin{cases} x^2-3xy+3y^2-z^2=31, \\ -x^2+6yz+2z^2=44, \\ x^2+xy+8z^2=100。 \end{cases}$$

二 题 解

中国1981年二十五省市自治区中学数学竞赛题解

①解一、正确的答案应是(B)．因为在图一中的两个三角形ΔABC与$\Delta A'B'C'$，虽然

$$AB=A'B', \qquad BC=B'C'$$

但
$$\angle AB'C'=180°-\angle ABC。$$

因此
$$\sin\angle B=\sin\angle B'。$$

所以
$$\Delta ABC\text{的面积}=\frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin(\angle B)$$

$$=\frac{1}{2}A'B'\cdot B'C'\cdot\sin(\angle B')=\Delta A'B'C'\text{的面积}。$$

但ΔABC与$\Delta A'B'C'$不全等。

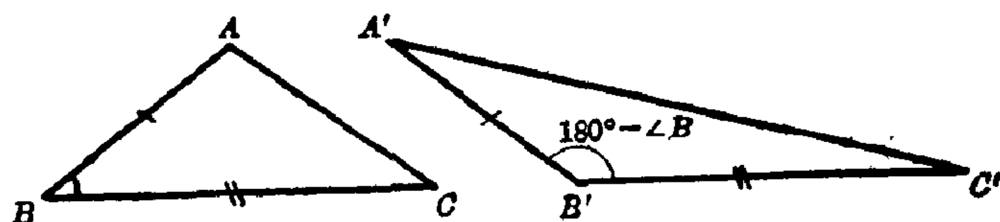


图 一

二、正确的答案应是(C)因为

$$T=\frac{\sin\alpha+\text{tg}\alpha}{\cos\alpha+\text{ctg}\alpha}=\frac{\text{tg}\alpha(1+\cos\alpha)}{\text{ctg}\alpha(1+\sin\alpha)}=\text{tg}^2\alpha\frac{1+\cos\alpha}{1+\sin\alpha}.$$

因为$\alpha\neq k\cdot\frac{\pi}{2}(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，所以

$$\operatorname{tg}^2\alpha>0,\ 1+\cos\alpha>0,\ 1+\sin\alpha>0,$$

因此 $$T>0.$$

三、正确答案应是(*D*).因为

$$\sqrt{1+\sin\theta}=\sqrt{\sin^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}+2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}$$

$$=\sqrt{\left(\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right)^2}=\left|\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right|.$$

这样举例来说若$\theta=-240°$，则

$$\sqrt{1+\sin(-240°)}=\sqrt{1+\sin 120°}=\sqrt{1+\sin 60°}$$

$$=\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{3}}>0,$$

$$\sin\left(\frac{-240°}{2}\right)+\cos\left(\frac{-240°}{2}\right)=\sin(-120°)+\cos(-120°)$$

$$=-\sin 60°-\cos 60°=-\frac{1+\sqrt{3}}{2}<0.$$

四、正确答案应是(*C*)因为

(i) ΔABC中，$\angle C=75°$，所以由正弦定律得（见图二）

$$\frac{BC}{\sin 60°}=\frac{\sqrt{2}}{\sin 45°},$$

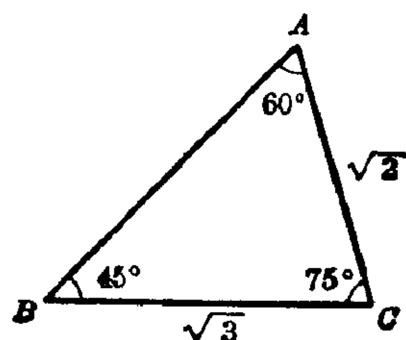
因此 $$BC=\frac{\sin 60°}{\sin 45°}\sqrt{2}=\sqrt{3},$$

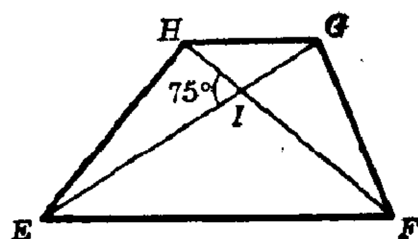
∴ $$\triangle ABC\text{的面积}=\frac{1}{2}\cdot BC\cdot AC\cdot\sin 75°$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}\cdot\sin 75°=\frac{\sqrt{6}}{2}\sin(30°+45°)$$

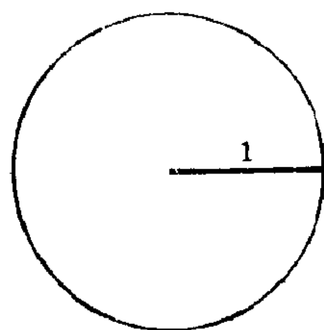
$$=\frac{\sqrt{6}}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{1}{4}\left(3+\sqrt{3}\right)$$

≈ 1.1830。





$HG=\sqrt{3}$， $HF=\sqrt{2}$



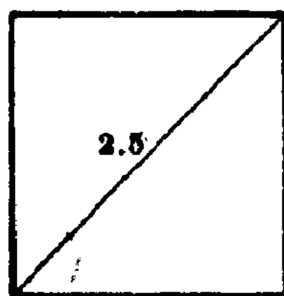


图　二

(ii) 设此梯形为$EFGH$(见图二)两对角线的交点为I。再设$\angle EIH=75°$，这样

$\sin(\angle EIH)=\sin(\angle HIG)=\sin(\angle GIF)=\sin(\angle FIE)$
$=\sin 75°$。

而　　梯形$EFGH$的面积

$=\triangle EIH$的面积$+\triangle HIG$的面积$+\triangle GIF$的面积$+\triangle FIE$的面积

$$=\frac{1}{2}EI\cdot IH\cdot\sin 75°+\frac{1}{2}HI\cdot IG\cdot\sin 75°$$

$$+\frac{1}{2}GI\cdot IF\cdot\sin 75°+\frac{1}{2}HI\cdot IE\cdot\sin 75°$$

$$= \frac{1}{2}\sin 75^\circ (EI+IG)(HI+IF)$$

$$= \frac{1}{2}\sin 75^\circ \cdot EG \cdot HF$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sin 75^\circ = \frac{1}{4}(3+\sqrt{3}) \approx 1.1830.$$

(iii) 半径为 1 的圆的面积 $= \pi \approx 3.1416$.

(iv) 此正方形的面积 $= \left(\frac{2.5}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{(2.5)^2}{2} = 3.125$.

五、正确的答案应是(A). 以直线 AB'为例，与它构成异面直线对的共有五对：

(AB',CD'), $(AB',A'C')$, (AB',BD), (AB',BC'), $(AB',A'D)$. 同样与直线$A'B$构成异面直线对的亦有五对，在考虑了AB', $A'B$以后，往下考虑其它直线时就再也不要考虑平面$ABB'A'$上的直线了，所以在这种排除之下，与直线CD'构成异面直线对的共有四对，与直线$C'D$构成异面直线对的亦有四对、在这以后，考虑其它直线时就再也不要考虑平面$ABB'A'$与平面$CDD'C'$上的直线了. 依此下去，可知所有的异面直线对为

$$5+5+4+4+3+3+2+2+1+1$$
$$=2(1+2+3+4+5)=2\times 15=30.$$

六、正确的答案应是(A). 因为区域M和N分别为图三和图四中绘有斜线的部份，而$M\cap N$
即为图五中绘有斜线的部份. 它由两个梯形$AFEB$和$BEDC$构成，而

$$AF=t,\ BE=1,\ CD=2-(t+1)=1-t,$$
$$AB=1-t,\ BC=1+t-1=t,$$

所以梯形$AFEB$的面积$=\frac{1}{2}(AF+BE)\cdot AB$

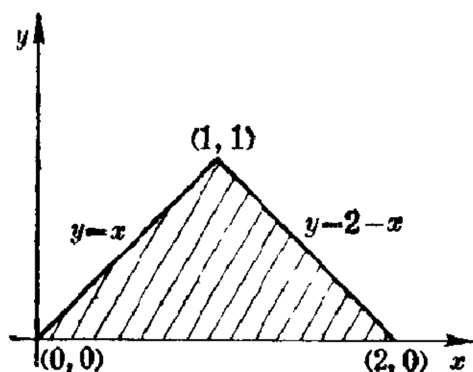
$=\frac{1}{2}(t+1)(1-t)\ =\frac{1}{2}(1-t^2)$，

梯形$BEDC$的面积$=\frac{1}{2}(BE+CD)\cdot BC$

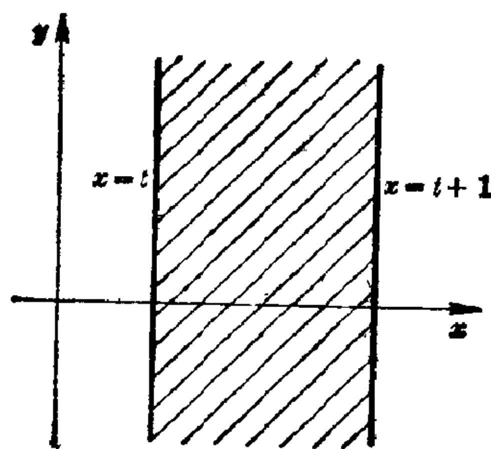
$=\frac{1}{2}\ (1+1-t)t=\frac{1}{2}(2-t)t$。

所以区域$M\cap N$的面积$=\frac{1}{2}(1-t^2)+\frac{1}{2}(2-t)t$

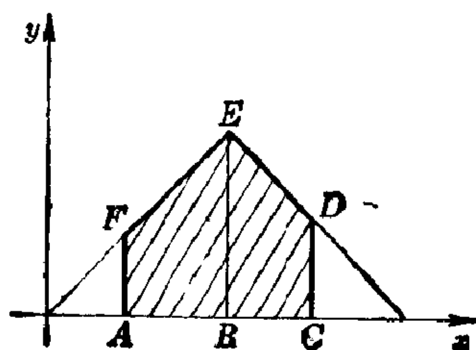
$=\frac{1}{2}+t-t^2$。



图三



图四



图五

七. 结论(C)和(D)是错误的,而结论(A)和(B)是对的。因为:

(i) 在$q=0$时，原方程为

$$x(|x|+p)=0,$$

所以它至多有三个相异的实根。在$q\neq 0$时，$x=0$一定不是原方程的根，所以若原方程有四个或四个以上的实根时，为原方程在$x>0$时，呈

$$x^2+px+q=0 \tag{1}$$

的形式；而在$x<0$时，呈

$$-x^2+px+q=0 \tag{2}$$

的形式，所以原方程在$x>0$时至多有两个实根，而在$x<0$时亦至多有两个实根，所以原方程至多有四个实根。若确是有四个实根，x_1，x_2，x_3，x_4，那么可设

$$x_1<x_2<0<x_3<x_4.$$

据(1)式有 $0<x_3\cdot x_4=q$,

亦即 $$0<q. \tag{3}$$

而据(2)式有 $0<x_1x_2=-q$,

所以 $$q<0. \tag{4}$$

这样(3)与(4)式相矛盾。因此不论$q=0$或是$q\neq 0$，结论(A)都成立。

(ii) 设$f(x)=x|x|+px+q$.

注意 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$.

所以一定存在充分大的正数M，使$f(M)>0$, $f(-M)<0$。再因为函数$f(x)$是连续函数，所以一定在闭区间$[-M, M]$内有一点ξ，使$f(\xi)=0$. 因此结论(B)成立.

(iii) 由(ii)中的论证可知原方程始终存在一个实根，与p^2-4q的正、负无关。因此结论(c)是错的.

（Ⅳ） 取 $0>p=-2$， $q=2>0$，
那末此方程在 $x>0$ 时呈

$$x^2-2x+2=0,$$

它在 $x>0$ 中无实根；而在 $x<0$ 时呈

$$x^2+2x-2=0,$$

它在 $x<0$ 中只有一实根 $x=-1-\sqrt{3}$。
因此此方程只有一个实根，所以结论 (D) 不成立。

②**解** 因为

$$\lg 0.021=\lg(10^{-3}\times 21)=-3+\lg 3+\lg 7,$$
$$\lg 0.27=\lg(10^{-2}\times 27)=-2+3\lg 3,$$
$$\lg 1.5=\lg(10^{-1}\times 15)=-1+\lg 3+\lg 5,$$
$$\lg 2.8=\lg(10^{-1}\times 28)=-1+2\lg 2+\lg 7,$$
$$\lg 6=\lg(2\times 3)=\lg 2+\lg 3,$$
$$\lg 8=\lg 2^3=3\lg 2,$$
$$\lg 9=\lg 3^2=2\lg 3,$$
$$\lg 14=\lg(2\times 7)=\lg 2+\lg 7.$$

所以从表中相对应的 $\lg x$ 的表达式，我们得到

$$\lg 3+\lg 7=2a+b+c, \tag{1}$$
$$\lg 3=2a-b, \tag{2}$$
$$\lg 3+\lg 5=1+3a-b+c, \tag{3}$$
$$2\lg 2+\lg 7=2-2a+2b-c, \tag{4}$$
$$\lg 3=2a-b, \tag{5}$$
$$\lg 5=a+c, \tag{6}$$
$$\lg 2+\lg 3=1+a-b-c, \tag{7}$$
$$\lg 7=2(b+c), \tag{8}$$
$$\lg 2=1-a-c, \tag{9}$$
$$\lg 3=2a-b, \tag{10}$$

$$\lg 2+\lg 7=1-a+2b. \tag{11}$$

我们先将不涉及$lg7$的式子汇集在一起，这包括(2)，(3)，(5)，(6)，(7)，(9)，(10)七个式子：

$$\begin{cases} \lg 3=2a-b, & (2)\\ \lg 3+\lg 5=1+3a-b+c, & (3)\\ \lg 3=2a-b, & (5)\\ \lg 5=a+c, & (6)\\ \lg 2+g l 3=1+a-b-c, & (7)\\ \lg 2=1-a-c, & (9)\\ \lg 3=2a-b, & (10)\end{cases}$$

我们选定(9)与(10作为基本的，即认定

$$\begin{cases} \lg 2=1-a-c, & (9)\\ \lg 3=2a-b. & (10)\end{cases}$$

从简单的运算可知，(2)，(5)，(6)，(7)都与之无矛盾。

从(6)，(10)得$lg3+lg5=2a-b+a+c=3a-b+c$，

这与(3)式的$lg3+lg5=1+3a-b+c$

是不相容的，因此可知(3)式有误。

现在再将以上$lg2$，$lg3$的表达式代入(1)，(4)，(11)式中，这样得到

$$\begin{cases} \lg 7=2a+b+c-(2a-b)=2b+c, & (1)\\ \lg 7=2-2a+2b-c-2(1-a-c)=2b+c, & (4)\\ \lg 7=2b+2c, & (8)\\ \lg 7=1-a+2b-(1-a-c)=2b+c. & (11)\end{cases}$$

因此可知lg7的表达式只有两种选择：$2b+c$或$2b+2c$。因为取$2b+c$的式子有三个，而取$2b+2c$的式子只有一个。而按题要求，错误的表达式只能有两个，所以只能取

$$lg7=2b+c.$$

总结上述可知：若此表有两处有误，那末一定是lg1.5与lg7这两个值的表达式有误，应改正为

$$\lg 1.5=3a-b+c-1,$$

$$\lg 7=2b+c.$$

③**解** 我们自圆心O点向弦CD和EF作垂直线，设其垂足分别为R和S，再设$OR=\alpha$，$OS=\beta$.

往下分两种情况进行讨论.

甲.R和S分别在圆心O的异侧（见图一）.

此时因

$$CR=\sqrt{1-\alpha^2} \qquad ES=\sqrt{1-\beta^2}$$

再因$\triangle ORP$和$\triangle OSQ$都是等腰直角三角形，所以

$$PR=\alpha, \qquad QS=\beta.$$

因此$CP=\sqrt{1-\alpha^2}+\alpha$， $PD=\sqrt{1-\alpha^2}-\alpha$，

$$EQ=\sqrt{1-\beta^2}-\beta, \quad QF=\sqrt{1-\beta^2}+\beta.$$

因此所要证的不等式

$$CP\cdot EQ+PD\cdot QF<2 \tag{1}$$

化为$(\sqrt{1-\alpha^2}+\alpha)(\sqrt{1-\beta^2}-\beta)+(\sqrt{1-\alpha^2}-\alpha)$

$\times(\sqrt{1-\beta^2}+\beta)<2$，

展开化为$\sqrt{1-\alpha^2}\sqrt{1-\beta^2}-\alpha\beta<1$，

亦即为 $\sqrt{1-\alpha^2}\sqrt{1-\beta^2}<1+\alpha\beta$.

两边平方，即得等价的不等式

$$(1-\alpha^2)(1-\beta^2)<(1+\alpha\beta)^2,$$

化简后得$0<\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta$，

即为 $$0<(\alpha+\beta)^2. \tag{2}$$

因为 $\alpha+\beta>0$

(若$\alpha+\beta=0$，则$\alpha=0$，$\beta=0$.则弦CD与EF要重合.）所以(2)式成立，故(1)式成立.

乙.R和S分别在圆心O的同侧(见图二).此时CR，ES，PR，QS的用α，β的表达式同甲中所述.但

$$CP=\sqrt{1-\alpha^2}+\alpha,\qquad PD=\sqrt{1-\alpha^2}-\alpha,$$

$$EQ=\sqrt{1-\beta^2}+\beta,\qquad QF=\sqrt{1-\beta^2}-\beta.$$

故(1)化为$(\sqrt{1-\alpha^2}+\alpha)(\sqrt{1-\beta^2}+\beta)+(\sqrt{1-\alpha^2}-\alpha)\times(\sqrt{1-\beta^2}-\beta)<2$.

展开后为$\sqrt{1-\alpha^2}\sqrt{1-\beta^2}+\alpha\beta<1$,

亦即为 $\sqrt{1-\alpha^2}\sqrt{1-\beta^2}<1-\alpha\beta$. (3)

因为 $0\leqslant\alpha<1$, $0\leqslant\beta<1$,

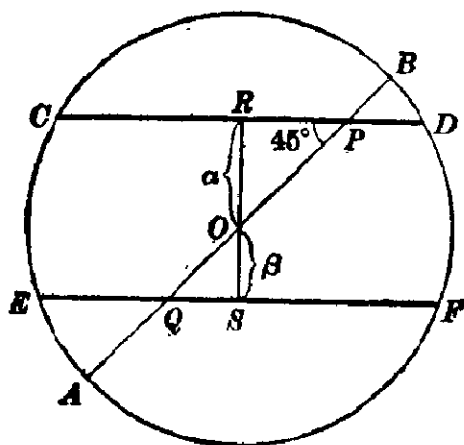
所以 $0\leqslant\alpha\beta<1$,

亦即 $1-\alpha\beta\geqslant0$.

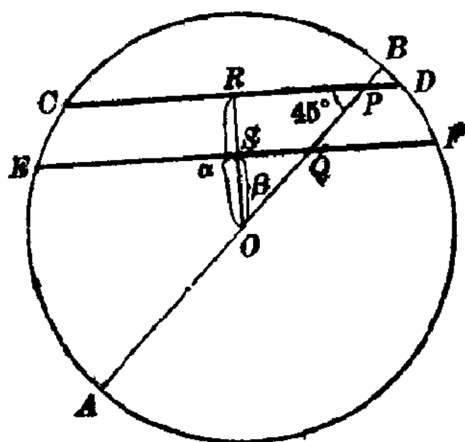
(3)式等价$(\sqrt{1-\alpha^2}\sqrt{1-\beta^2})^2<(1-\alpha\beta)^2$,

亦即 $(1-\alpha^2)(1-\beta^2)<1-2\alpha\beta+\alpha^2\beta^2$,

化简后得$0<(\alpha-\beta)^2$. (4)



图一



图二

因为 $\alpha \neq \beta$,

(若 $\alpha=\beta$，则弦 CD 和 EF 要重合.)所以(4)式成立，故(1)式成立。

④**解** 设库存的 A、B、C 三种零件其个数分别为 a、b、c。据题意，即得

$$\begin{cases} a=2p+2r+2, \\ b=2p+q+1, \\ c=r+q, \end{cases} \tag{1}$$

其中 p，q，r 都是自然数.

我们用反证法来证明本题的结论，即如果存在一种分配方案：生产甲、乙、丙三种产品的件数分别是 p'，q'，r'，(其中 p'，q'，r' 都是非负整数,)使得三种零件 A、B、C 都恰好用完，那么，我们据此假设可得

$$\begin{cases} a=2p'+2r', \\ b=2p'+q', \\ c=r'+q'. \end{cases} \tag{2}$$

联立(1)式与(2)式，再设

$$\Delta p=p-p', \qquad \Delta q=q-q', \qquad \Delta r=r-r',$$

那么可得
$$\begin{cases} \Delta p \qquad +\Delta r=-1 \\ 2\Delta p+\Delta q \qquad =-1, \\ \qquad \Delta q+\Delta r=0. \end{cases} \tag{3}$$

这是一个关于 Δp，Δq，Δr 的三元一次联立方程，再因系数行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=1+2=3\neq 0,$$

所以可从(3)式中解出 Δp，Δq，Δr，亦即

$$\Delta p=\begin{vmatrix}-1&0&1\\-1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}\Big/3=(-1-1)/3=-\frac{2}{3},$$

$$\Delta q=\begin{vmatrix}1&-1&1\\2&-1&0\\0&0&1\end{vmatrix}\Big/3=(-1+2)/3=\frac{1}{3},$$

$$\Delta r=\begin{vmatrix}1&0&-1\\2&1&-1\\0&1&0\end{vmatrix}\Big/3=(-2+1)/3=-\frac{1}{3}.$$

而这是矛盾的，因为p，q，r与p'，q'，r'都是整数，所以Δp，Δq，Δr也都一定要是整数．但今它们却都是分数，所以矛盾．本题证毕．

⑤**解**　先设若UV，VW，WZ是正六边形相邻的三条边，而且该正六边形的边长为2．又设若台球从边UV上的S点发出(见图一)，碰到边VW上的T点，再反射出来到达边WZ上的X点。再设

$$SV=x,\qquad TW=y,$$
$$\angle TSV=\alpha,\qquad \angle XTW=\beta.$$

现在要问的是：若已知　x与α，求y与β．这是一个基本的关系式，本题往下要反复用这个关系式，所以先在这里将它提出来．因为ST与Tx是入射线与反射线，而在T点外边VW的法线即为过T点的边VW的垂直线TY．

根据　　入射角＝反射角，

即有　　$\angle STY=\angle XTY$，

所以　　$\angle VTS=\beta$．

这样在ΔSVT中，因为$\angle SVT=120°$，所以由正弦定律得到

$$\frac{VT}{\text{sim}\alpha}=\frac{x}{\text{sim}\beta},$$

但 $$\alpha+\beta=180°-120°=60°,$$

所以 $$VT=\frac{\text{sim}\alpha}{\text{sim}(60°-\alpha)}x.$$

因此 $$y=VW-VT=2-\frac{\text{sim}\alpha}{\text{sim}(60°-\alpha)}x.$$

因此有 $$\begin{cases}\beta=60°-\alpha, & (1)\\ y=2-\dfrac{\text{sim}\alpha}{\text{sim}(60°-\alpha)}x. & (2)\end{cases}$$

现设此正六边形的每边长为2，再设台球从边 AB 的中点 P 出发后，依次与各边都有碰撞，再用 x_1，x_2，…，x_6 表示各碰撞点与前向的六边形顶点之间的距离(见图二)，再利用(1)式，可得到在各边上碰撞时入射线、反射线与相应边之间的夹角，再利用(2)式和

$$PB=1,\qquad \angle QPB=\theta,$$

所以 $$x_1=2-\frac{\text{sim}\theta}{\text{sim}(60°-\theta)}.$$

利用(2)得 $$\begin{aligned}x_2&=2-\frac{\text{sim}(60°-\theta)}{\text{sim}\theta}x_1\\&=2-\frac{\text{sim}(60°-\theta)}{\text{sim}\theta}\left(2-\frac{\text{sim}\theta}{\text{sim}(60°-\theta)}\right)\\&=3-2\frac{\text{sim}(60°-\theta)}{\text{sim}\theta}.\end{aligned}$$

再用(2)得 $$\begin{aligned}x_3&=2-\frac{\text{sim}\theta}{\text{sim}(60°-\theta)}x_2\\&=2-\frac{\text{sim}\theta}{\text{sim}(60°-\theta)}\left(3-2\frac{\text{sim}(60°-\theta)}{\text{sim}\theta}\right)\\&=4-3\frac{\text{sim}\theta}{\text{sim}(60°-\theta)}.\end{aligned}$$

这样反复利用(2)式，就可继续得到x_4，x_5，x_6，现在一并把它们列在下面：

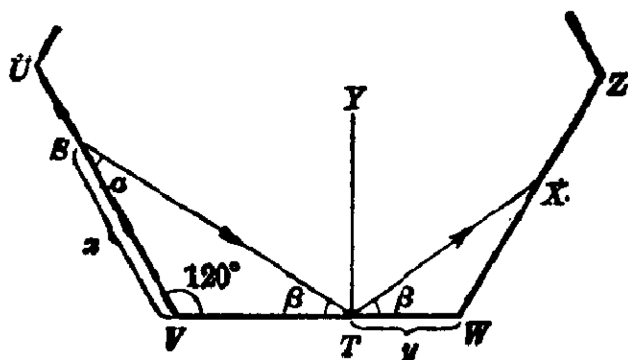
$$\begin{cases} x_1 = 2 - \dfrac{\text{sim}\theta}{\text{sim}(60^\circ - \theta)}, & (3) \\ x_2 = 3 - 2\dfrac{\text{sim}(60^\circ - \theta)}{\text{sim}\theta}, & (4) \\ x_3 = 4 - 3\dfrac{\text{sim}\theta}{\text{sim}(60^\circ - \theta)}, & (5) \\ x_4 = 5 - 4\dfrac{\text{sim}(60^\circ - \theta)}{\text{sim}\theta}, & (6) \\ x_5 = 6 - 5\dfrac{\text{sim}\theta}{\text{sim}(60^\circ - \theta)}, & (7) \\ x_6 = 7 - 6\dfrac{\text{sim}(60^\circ - \theta)}{\text{sim}\theta}. & (8) \end{cases}$$

这样，为了保证上述从(3)式至(8)式的诸$x_i(1 \leqslant i \leqslant 6)$的表达式与图二是一致的，这就要求

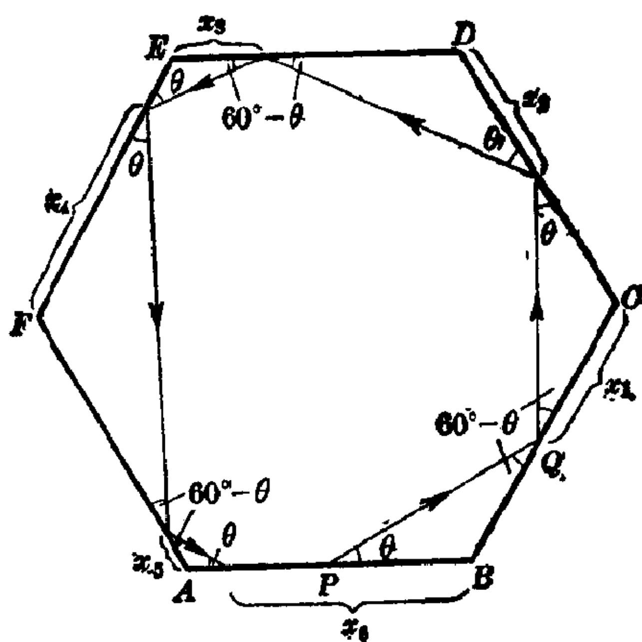
$$0 < x_i < 2, \qquad 1 \leqslant i \leqslant 6. \tag{9}$$

在讨论不等式组(9)之前，我们先要说明

$$0^\circ < \theta < 60^\circ. \tag{10}$$



图一



图二

这是因为从图三中可看出，为保证从P点出发的台球一定与边BC碰撞，所以一定要求

$$0°\angle\theta<\angle CPB=\theta_0,$$

但 $$\angle CPB<\angle RPB,$$

其中R是边CD的中点。因为$PR\parallel BC$，所以

$$\angle RPB=180°-120°=60°,$$

因此有 $$\theta_0<60°,$$

所以 $$0°<\theta<\theta_0<60°,$$

因此(10)式成立。现在从

$$0<x_1<2,\quad 0<x_3<2,\quad 0<x_5<2,$$

可得到，$0<\dfrac{\text{sim}\theta}{\text{sim}(60°-\theta)}<2$，$\quad \dfrac{2}{3}<\dfrac{\text{sim}\theta}{\text{sim}(60°-\theta)}<\dfrac{4}{3}$，

$$\frac{4}{5}<\frac{\text{sim}\theta}{\text{sim}(60°-\theta)}<\frac{6}{5},$$

这就要求$\max\left(0,\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{4}{5}\right)<\dfrac{\text{sim}\theta}{\text{sim}(60°-\theta)}$

$$<\min\left(2,\ \frac{4}{3},\ \frac{6}{5}\right),$$

即
$$\frac{4}{5}<\frac{\mathrm{sim}\theta}{\mathrm{sim}(60^\circ-\theta)}<\frac{6}{5}. \tag{11}$$

$$0<x_2<2,\quad 0<x_4<2,\quad 0<x_6<2,$$

可得 $\frac{1}{2}<\frac{\mathrm{sim}(60^\circ-\theta)}{\mathrm{sim}\theta}<\frac{3}{2}$, $\frac{3}{4}<\frac{\mathrm{sim}(60^\circ-\theta)}{\mathrm{sim}\theta}<\frac{5}{4}$,

$$\frac{5}{6}<\frac{\mathrm{sim}(60^\circ-\theta)}{\mathrm{sim}\theta}<\frac{7}{6},$$

这就要求 $\max\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4},\frac{5}{6}\right)<\frac{\sin(60^\circ-\theta)}{\sin\theta}<\min\left(\frac{3}{2},\frac{5}{4},\frac{7}{6}\right)$.

即
$$\frac{5}{6}<\frac{\sin(60^\circ-\theta)}{\sin\theta}<\frac{7}{6}. \tag{12}$$

因为(10)式成立，所以

$$\sin\theta>0,\qquad \sin(60^\circ-\theta)>0,$$

因此与(12)式等价的是

$$\frac{6}{7}<\frac{\sin\theta}{\sin(60^\circ-\theta)}<\frac{6}{5}. \tag{13}$$

这样结合(11)与(13)，可知与不等式组(9)等价的是

$$\frac{6}{7}<\frac{\sin\theta}{\sin(60^\circ-\theta)}<\frac{6}{5}. \tag{14}$$

解不等式(14)的左半部份，即

$$\frac{6}{7}<\frac{\sin\theta}{\sin(60^\circ-\theta)},$$

$$6(\sin60^\circ\cos\theta-\cos60^\circ\sin\theta)<7\sin\theta,$$

$$3\sqrt{3}\cos\theta-3\sin\theta<7\sin\theta,$$

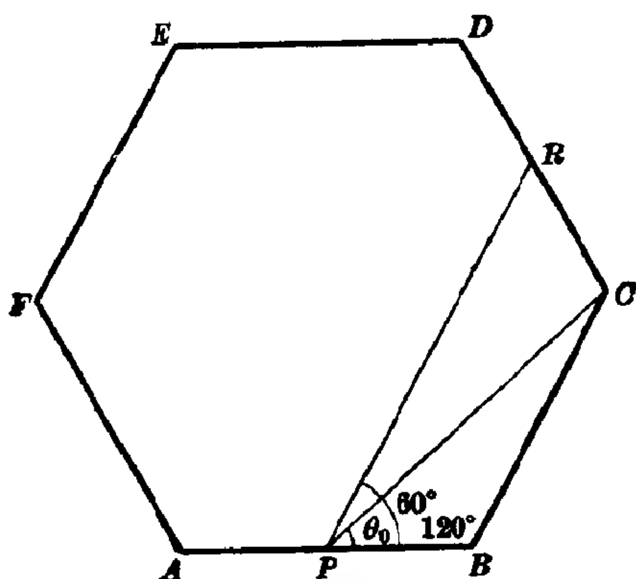
$$3\sqrt{3}\cos\theta<10\sin\theta.$$

因为$\sin\theta>0$，$\cos\theta>0$，所以此即

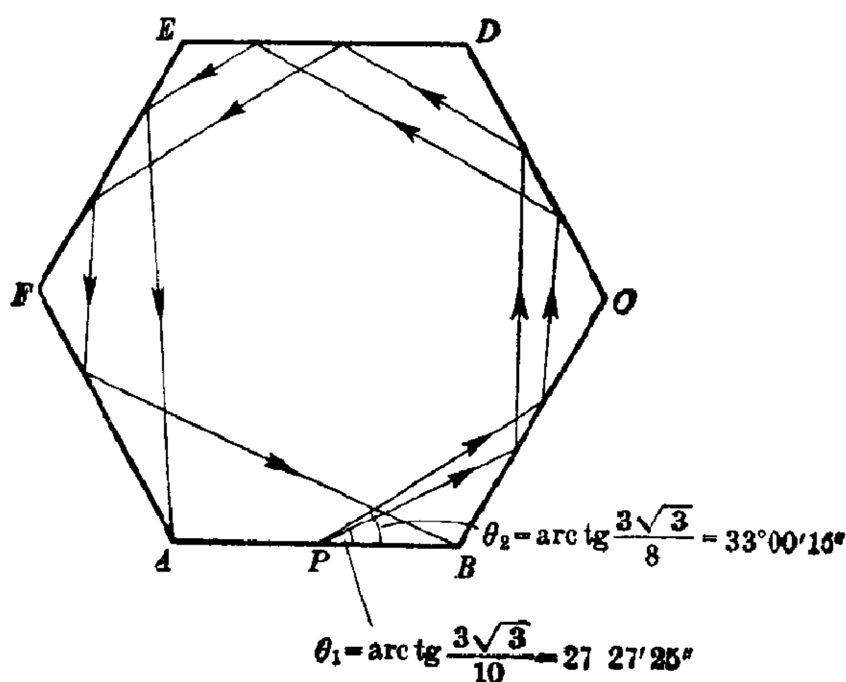
$$\frac{3\sqrt{3}}{10}<\operatorname{tg}\theta, \qquad arc\operatorname{tg}\frac{3\sqrt{3}}{10}=\theta_1<\theta.$$

而解不等式(14)的右半部份，即

$$\frac{\sin\theta}{\sin(60°-\theta)}<\frac{6}{5},$$



图三



图四

$$5\sin\theta<6(\sin60^\circ\cos\theta-\cos60^\circ\sin\theta),$$

$$5\sin\theta<3\sqrt{3}\cos\theta-3\sin\theta,$$

$$\operatorname{tg}\theta<\frac{3\sqrt{3}}{8},$$

$$\theta<\theta_2=arctg\,\frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

故答案是：$\theta_1<\theta<\theta_2$，

其中 $\theta_1=arc\operatorname{tg}\frac{3\sqrt{3}}{10}\approx arc\operatorname{tg}0.196\approx27^\circ27'25''$

$\theta_2=arc\operatorname{tg}\frac{3\sqrt{3}}{8}\approx arc\operatorname{tg}0.6495\approx33^\circ00'16''$

图四中得出了这两种极端的情况，即$\theta=\theta_1$和$\theta=\theta_2$的情况。

北京市1981年中学数学竞赛题解

初三年级

①**解**　设此自然数为A，据题意，有

$$\begin{cases}A-45=B^2,\\A+44=C^2.\end{cases}\qquad(1)$$

不失一般性，可设$B>0$，$C>0$。

从（1）得　　$C^2-B^2=89$，　　（2）

亦即　　$(C-B)(C+B)=89$。　　（3）

注意89是一个素数；再因为C，B都是整数，故$C-B$，$C+B$亦都是整数。而从（2）式可得$C>B$，亦即

$$C-B>0,$$

又因　　$C+B>0$，$C+B>C-B$，

故从（3）式一定有$\begin{cases} C+B=89, \\ C-B=1. \end{cases}$　　(4)

这样从（4）式解得$\begin{cases} C=45, \\ B=44. \end{cases}$

所以　　$A=45+44^2=45^2-44=1981$。

②**解**　设此正方形每边之长为$2a$，$\angle CBE=\alpha$。因为$\triangle BCE\cong\triangle CDF$，（见图一），所以$\angle FCD=\alpha$。

本因$\alpha+\angle BEC=90^\circ$，

所以　　$\angle PCE+\angle PEC=90^\circ$，

亦即　　$\angle CPE=90^\circ$。

所以　　$BP=BC\cdot\cos\alpha=2a\cos\alpha$。

这样在$\triangle ABP$中已知$AB=2a$，$\angle ABD=90^\circ-\alpha$，根据余弦定理可知

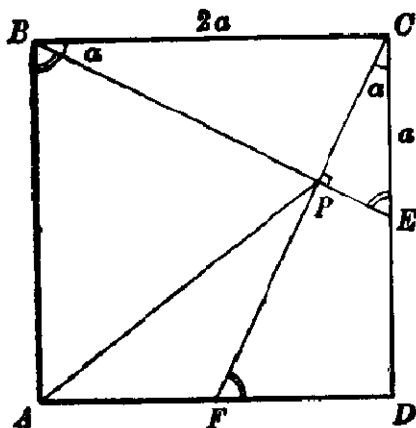
$$AP^2=AB^2+BP^2-2AB\cdot BP\cdot\cos(90^\circ-\alpha)$$
$$=4a^2+4a^2\cos^2\alpha-8a^2\cos\alpha\sin\alpha.$$

再注意$\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，$\cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，

故　　$AP^2=4a^2+4a^2\cdot\dfrac{4}{5}-8a^2\cdot\dfrac{2}{5}$

$$=4a^2,$$

因此　　$AP=2a=AB$。



图一

③**解**　注意

$$\frac{1}{3-\sqrt{7}}=\frac{3+\sqrt{7}}{3^2-7}=\frac{3+\sqrt{7}}{2}=\frac{4+\sqrt{7}-1}{2}$$
$$=2+\frac{\sqrt{7}-1}{2}.$$

因为　　$1<\sqrt{7}<3$，

所以　　$0<\dfrac{\sqrt{7}-1}{2}<1$，

所以　　$a=2$，　　$b=\dfrac{\sqrt{7}-1}{2}$。

这样　$a^2+(1+\sqrt{7})ab=2^2+(1+\sqrt{7})\cdot 2\cdot\dfrac{\sqrt{7}-1}{2}$

$$=4+(\sqrt{7})^2-1=10.$$

④**解**　设此三角形的三个内角分别为α，β、γ。而且

$$\alpha\leqslant\beta\leqslant\gamma.$$

根据题意有　　$\gamma=\alpha+24°$，

又因为　　$\alpha+\beta+\gamma=180°$，

所以　　$\alpha+\beta+\alpha+24°=180°$，$\beta=156°-2\alpha$。

故(1)化为　　$\alpha\leqslant 156°-2\alpha\leqslant\alpha+24°$，

从以上不等式的前半部份，可知$\alpha\leqslant 52°$；而从后半部份，可知$44°\leqslant\alpha$，所以α的取值范围只允许是闭区间$[44°, 52°]$，而相应的三个角分别是α，$156°-2\alpha$，$\alpha+24°$。若记$n°$为此三角形中某两角之和，则有三种情况：

(i)　$n°=\alpha+156°-2\alpha$。那末$n°=156°-\alpha$，

其值域是从$156°-44°=112°$到$156°-52°=104°$，亦即是闭区间$[104°, 112°]$。

(ii)　$n°=\alpha+\alpha+24°$。那末$n°=24°+2\alpha$，

其值域是从$24°+2\cdot 44°=112°$到$24°+2\cdot 52°=128°$，亦即是闭区间$[112°, 128°]$。

(iii)　$n°=156°-2\alpha+\alpha+24°$　那末$n°=180°-\alpha$，

其值域是从$180°-44°=136°$到$180°-52°=128°$，亦即是闭区间$[128°, 136°]$。

所以综合以上(i)，(ii)，(iii)三种情况，可知n的取值范围是

$$[104°,112°]\cup[112°, 128°]\cup[128°,136°]=[104°,136°]。$$

⑤**解** 先介绍一种用代数文字表示十进数的记法。如a，b，c为0，1，2，…，9这十个整数之某一个时，我们用$(abc)_{10}$表示一个十进数，即

$$(abc)_{10}=a\cdot10^2+b\cdot10+c。$$

注意 $\qquad (abc)_{10}\neq a、b、c。$

举例来说，若$a=2$，$b=5$，$c=7$，那末

$$(abc)_{10}=(2\ \ 5\ \ 7)_{10}=2\times10^2+5\times10+7=257,$$

而 $\qquad (257)_{10}\neq 2\cdot5\cdot7=70。$

现在我们设那个使两数乘积为最大的三位数为$(ABC)_{10}$，而那个四位数为$(DEFG)_{10}$。

据题意 $\qquad \{A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F,\ G\}=\{3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$，

究竟A，…，G中那个为3，那个为4，…就要靠我们来分析。下面分五步来完成这个分析步骤。

1） 一定有 $\quad A>B>C \qquad (1)$

$D>E>F>G \qquad (2)$

这是因为若（1）式或（2）式中有某一不等式不成立时，举例来说，若$E>F$不成立，那末一定有$F>E$，那末我们观察

$$(ABC)_{10}\times(DEFG)_{10}与(ABC)_{10}\times(DFEG)_{10}。$$

首先因为 $\qquad F-E>0,$

所以 $\qquad (F-E)10^2>(F-E)10,$

亦即 $\qquad F\cdot10^2+E\cdot10>E\cdot10^2+F\cdot10,$

即 $\qquad (DFEG)_{10}>(DEFG)_{10},$

所以有 $(ABC)_{10}\times(DFEG)_{10}>(ABC)_{10}\times(DEFG)_{10}$.

而这与原假设要使乘积为最大这一点相矛盾。

2) 一定有 $C>G$, $B>F$, $A>E$. (3)

若(3)式中某一不等式不成立，举例来说，$B>F$不成立，那末一定有$F>B$。我们再比较

$$(ABC)_{10}\times(DEFG)_{10} \quad 与 (AFC)_{10}\times(DEBG)_{10}.$$

注意 $(ABC)_{10}\times(DEFG)_{10}=(ABC)_{10}\times(DEBG)_{10}+(ABC)_{10}\times(F-B)\times10$,

$$(AFC)_{10}\times(DEBG)_{10}=(ABC)_{10}\times(DEBG)_{10}+(F-B)\times10\times(DEFG)_{10}.$$

因为一个四位数总是大于一个三位数，所以有

$$(DEFG)_{10}>(ABC)_{10},$$

再因为 $F-B>0$,

所以 $(AFC)_{10}\times(DEBG)_{10}>(ABC)_{10}\times(DEFG)_{10}$.

而这又与原假设要使乘积为最大这一点相矛盾。

这样从以上两步分析，就知G为七个数中最小的一个，这是因为从(1)，(2)，(3)可得

$$D>E>F>G,\ A>B>C>G.$$

即G为七个数中最小，故$G=3$。往下我们还有：

3) 一定有 $D>B$, $E>C$. (4)

其证明方法是与(2)相类似的。读者可作为练习自行完成。

这样我们进行到这一步，综合利用(1)，(2)，(3)，(4)可知

$$A>B>C,\ D>E>C,$$
$$A>B>F,\ D>E>F,$$

故知集合 $\{A, B, D, E\}$中的任何一数，要比集合$\{C, F\}$

中的任何一数为大，今已知$G=3$，因此可知

$$\{C, F\}=\{4, 5\}.$$

再从 $A>B$, $A>E$, $D>B$, $D>E$,

可知 $\{B, E\}=\{6, 7\}$, $\{A, D\}=\{8, 9\}$.

而要作出进一步的判断，我们有：

4) 若$A>D$，那末一定有$E>B$和$F>C$；若$A<D$，那末一定有$E<B$和$F<C$.

我们择其中之一来加之证明，如择$A>D$时要证明$E>B$. 如不是$E>B$，那末有$B>E$. 则我们比较

$$(ABC)_{10}\times(DEFG)_{10}\text{与}(AEC)_{10}\times(DBFG)_{10}.$$

因为 $$(ABC)_{10}\times(DEFG)_{10}=(AEC)_{10}\times(DEFG)_{10}+(B-E)\times10\times(DEFG)_{10},$$

$$(AEC)_{10}\times(DBFG)_{10}=(AEC)_{10}\times(CEFG)_{10}+(B-E)\times10^2\times(AEC)_{10}.$$

注意 $$10^2\times(AEC)_{10}=(AEC00_{10}),$$

$$10\times(DEFG)_{10}=(DEFGO)_{10}$$

而在$A>D$时，一定有

$$(AEC00)_{10}>(A0000)_{10}\geqslant[(D+1)0000]_{10}>(DEFG0)_{10},$$

所以 $$(AEC00)_{10}>(DEFG0)_{10}.$$

再因为$B-E>0$，故

$$(AEC)_{10}\times(DBFG)_{10}>(ABC)_{10}\times(DEFG)_{10}.$$

而这与原假设要使乘积为最大这一点相矛盾。

到此为止，我们只有两种可能了，那就是

$$A=9, D=8;$$

此时 $E=7$, $B=6$, $F=5$, $C=4$,

另一种可能是 $A=8$, $D=9$,

此时　　$B=7$，$E=6$，$C=5$，$F=4$。

所以一种组合是　$964\times8753=8437892$，

而另一种组合是　$875\times9643=8437629$。

故我们取前者，即

使得乘积为最大的分组排列应是　964×8753。

⑥解　设N的标准因子分解式为

$$N=P_1^{\alpha_1}P_2^{\alpha_2}\cdots P_k^{\alpha_k},$$

其中　　$P_1<P_2<\cdots<P_k$

为素数，而α_i是自然数，$1\leqslant i\leqslant k$。

这样N的每一个正约数必定是呈以下形式：

$$P_1^{\beta_1}P_2^{\beta_2}\cdots P_k^{\beta_k},$$

其中　　β_i是整数，而且$0\leqslant\beta_i\leqslant\alpha_i$，$1\leqslant i\leqslant k$。

但　　$\beta_1=\beta_2=\cdots\beta_k=0$

和　　$\beta_1=\alpha_1$，$\beta_2=\alpha_2$，$\cdots$，$\beta_k=\alpha_k$

这两种情况要除外。因此N的所有正约数的个数为

$$(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\cdots(1+\alpha_k)-2,$$

由题意知这一数为奇数，所以　$(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\cdots(1+\alpha_k)$是奇数。这样它的每一个因子$1+\alpha_1$，$1+\alpha_2$，$\cdots1+\alpha_k$，都一定是奇数，因为其中若有一为偶数，那么它们的乘积亦一定为偶数，而这样就与题意相矛盾。因此α_1，α_2，$\cdots$，α_k都为偶数，

即　　$\alpha_1=2\gamma_1$，$\cdots$，$\alpha_k=2\gamma_k$。

这样　$N=P_1^{\alpha_1}P_2^{\alpha_2}\cdots P_k^{\alpha_k}=P_1^{2\gamma_1}P_2^{2\gamma_2}\cdots P_k^{2\gamma_k}$

$=(P_1^{\gamma_1}P_2^{\gamma_2}\cdots P_k^{\gamma_k})^2$，

故N是一个完全平方数。

高一年级

①解　注意当$a<1$时，为使

$$\log_a y<0,$$

应有 $\quad y>1$。

今因$a=0.01<1$，故有

$$\log_6\frac{x-8}{x-3}>1,$$

亦即 $\quad \dfrac{x-8}{x-3}>6$。 $\quad$ (1)

而(1)式等价于

$$\begin{cases}x-3>0,\\ x-8<6(x-3),\end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases}x-3<0,\\ x-8<6(x-3).\end{cases}$$

而前者之联立不等式组其解为

$$\begin{cases}x>3,\\ 2>x,\end{cases} \quad 亦即无解;$$

而后者之联立不等式组其解为

$$\begin{cases}x<3,\\ x>2,\end{cases} \quad 亦即 \quad 2<x<3.$$

所以原不等式的解是：$2<x<3$。

②**解** 注意三角恒等式

$$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+45°).$$

所以原式 $\quad (\sin A+\cos A)(\sin B+\cos B)=2$

可化为 $\quad \sin(A+45°)\sin(B+45°)=1,$ $\quad$ (1)

亦即 $\quad |\sin(A+45°)|\ |\sin(B+45°)|=1.$ $\quad$ (2)

因对任何x，$|\sin x|\leqslant 1$。

所以现在与(2)式等价的有

$$\begin{cases}|\sin(A+45°)|=1,\\ |\sin(B+45°)|=1,\end{cases}$$

亦即 $\quad \begin{cases}\sin(A+45°)=\pm 1,\\ \sin(B+45°)=\pm 1.\end{cases}$

但考虑到（1），故只能是

$$\begin{cases}\sin(A+45^\circ)=1,\\ \sin(B+45^\circ)=1,\end{cases}$$

或

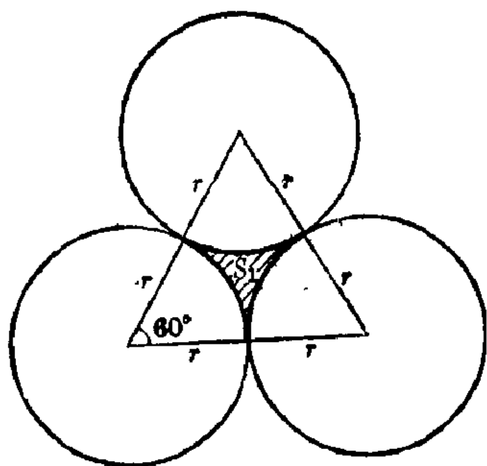
$$\begin{cases}\sin(A+45^\circ)=-1,\\ \sin(B+45^\circ)=-1,\end{cases}$$

故知 $A=B=45^\circ+k\cdot360^\circ$ 或 $A=B=135^\circ+k\cdot360^\circ$，其中 k 是整数．但因 A、B、C 是三角形的三内角，所以应有 $A=B=45^\circ$，$C=90^\circ$

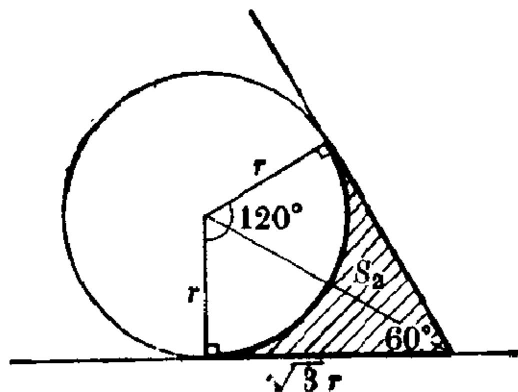
③**解** 设十个等圆的半径为 r．我们第一步是先求出下列图一、图二和图三中分别划有斜线部份的面积 S_1、S_2 和 S_3．

1） $S_1=\frac{1}{2}\cdot(2r)^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\pi r^2\cdot\frac{1}{6}\cdot3$

$$=\sqrt{3}r^2-\frac{\pi r^2}{2}=\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}\right)r^2.$$



图一



图二

2） $S^2=\frac{1}{2}\cdot r\cdot\sqrt{3}r\cdot2-\pi r^2\cdot\frac{1}{3}$

$$=\sqrt{3}r^2-\frac{\pi r^2}{3}=\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right)r^2.$$

3) $S_3 = r \cdot 2r - \pi r^2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 2$

$$= 2r^2 - \frac{\pi}{2}r^2 = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)r^2.$$

因原等边三角形的边长为 l，故我们可通过图四中的面积关系而得到 r 与 l 的关系，
即

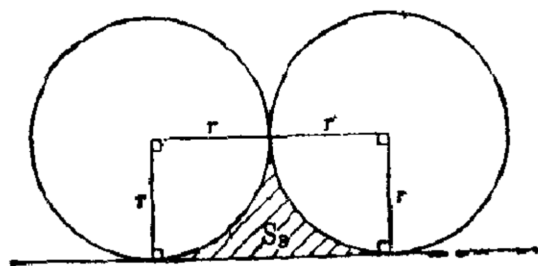
$$\frac{1}{2} \cdot l \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}l = 10 \cdot \pi r^2 + 9S_1 + 3S_2 + 9S_3,$$

亦即 $$\frac{\sqrt{3}}{4}l^2 = \pi r^2 (10 - 4.5 - 1 - 4.5) + (9\sqrt{3} + 3\sqrt{3} + 18)r^2,$$

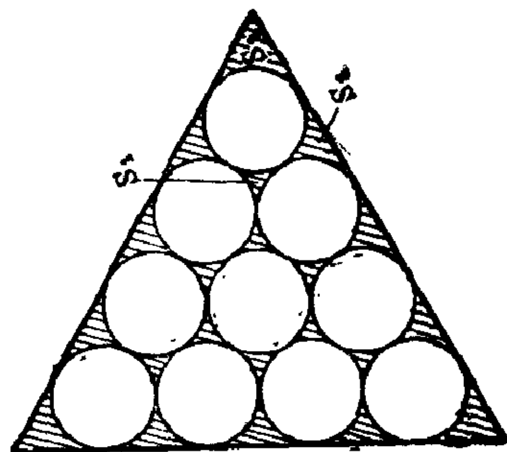
故 $$r^2 = \frac{l^2}{24(2+\sqrt{3})} = \frac{2-\sqrt{3}}{24}l^2.$$

因此，十个等圆的面积之和 $= 10\pi r^2 = \frac{10(2-\sqrt{3})}{24}\pi l^2$

$$\approx 0.3507 l^2.$$



图三



图四

④**解** 设BC的中点是O，连结OM、BM、CE.（见图一）.我们先证明$\angle BMA=67.5°$. 这是因为四边形$ABOM$中，

$$\angle OBA=\angle MAB=67.5°,\ \angle OMA=90。$$

因此 $$\angle BOM=135°.$$

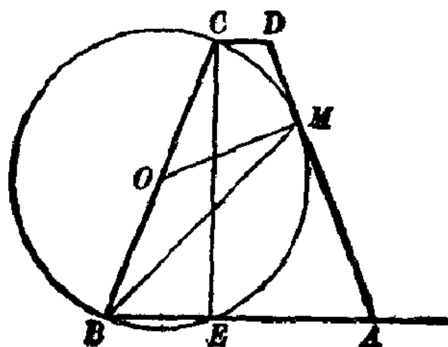


图 一

而因为$\triangle BOM$是等腰三角形，故$\angle OMB=22.5°$，

因此 $\angle BMA=90°-22.5°=67.5°$.

这样，$\triangle BMA$中，因$\angle BMA=67.5°=\angle BAM$，所以$\triangle BMA$是等腰三角形. 因此若设$BO=CO=a$，那么

$$BM=2\cdot a\cos 22.5°,$$

$$AM=2\cdot BM\cos 67.5°=4a\cos 22.5°\cos 67.5$$

$$=4a\cos 22.5°\sin 22.5,$$

$$=2a\sin 45°=2a\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}a.$$

再注意$\triangle BEC$是直角三角形，因此

$$BE=2a\cdot\cos 67.5°$$

再因为AM是从圆O外一点到该圆的切线，AEB是割线，

所以 $$AB\cdot AE=AM^2.$$

所以若设 $$AE=x$$

那末 $$(2a\cos 67.5°+x)x=(\sqrt{2}a)^2,$$

即 $$x^2+2a\cos 67.5°x-2a^2=0. \qquad (1)$$

注意 $\cos 67.5° = \sin 22.5° = \sqrt{\dfrac{1-\cos 45°}{2}} = \sqrt{\dfrac{1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{2}}$

$$= \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

∴(1)为 $x^2 + \sqrt{2-\sqrt{2}}\,ax - 2a^2 = 0$,

$$x = \frac{-\sqrt{2-\sqrt{2}}\,a \pm \sqrt{(2-\sqrt{2})a^2 + 8a^2}}{2}$$

$$= \frac{-\sqrt{2-\sqrt{2}} \pm \sqrt{10-\sqrt{2}}}{2}a.$$

由$x>0$有 $x = \dfrac{\sqrt{10-\sqrt{2}} - \sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}a$.

所以 $\dfrac{BE}{AE} = \dfrac{2\sqrt{2-\sqrt{2}}\,a}{(\sqrt{10-\sqrt{2}} - \sqrt{2-\sqrt{2}})a}$

$$= \frac{2\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{10-\sqrt{2}} - \sqrt{2-\sqrt{2}}}$$

$$= \frac{2\sqrt{2-\sqrt{2}}(\sqrt{10-\sqrt{2}} + \sqrt{2-\sqrt{2}})}{10-\sqrt{2}-(2-\sqrt{2})}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{2-\sqrt{2}}(\sqrt{10-\sqrt{2}} + \sqrt{2-\sqrt{2}})$$

$$= \frac{1}{4}(\sqrt{22-12\sqrt{2}} + 2 - \sqrt{2})$$

$$= \frac{1}{4}(\sqrt{(3\sqrt{2}-2)^2} + 2 - \sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

所以 $BE:AE = 1:\sqrt{2}$

⑤解 设此矩形水池的长为x尺，宽为y尺。当然，据题

意，x、y一定都是自然数。而造价为 $27x+35y$，

水池面积为　　$S=xy$。

这样，本题可归结为如下的数学模型

在约束条件：x、y都是自然数，

$$27x+35y\leqslant 1000 \tag{1}$$

之下，求函数　$S=xy$的最大值

我们用两种方法来解本题。

解法一　从约束条件（1）得到

$$x\leqslant\frac{1000-35y}{27}$$

这就是说，当固定 y 时，x 所能取得的最大值为整数

$$\left[\frac{1000-35y}{27}\right].^{〔注〕}$$

因此，当 y 为自然数且固定时，函数$S=xy$的最大值为

$$f(y)=y\left[\frac{1000-35y}{27}\right]. \tag{2}$$

所以，在数学模型Ⅰ之下，$S=xy$的最大值即为（2）式中$f(y)$的最大值。注意除 y 是自然数外，还须保证$\left[\frac{1000-35y}{27}\right]$亦是一自然数，所以这要求

$$1\leqslant\frac{1000-35y}{27},$$

亦即　　　$y\leqslant\frac{973}{35}=27.8$，

〔注〕$[y]$表示实数z所包含的最大整数，如$[1.7]=1$，$[4]=4$，$[-3.6]=-4$.

即要求　　$1 \leqslant y \leqslant 27$。　　　　　　　　　　　　　　　　　(3)

所以现在只要求出27个函数值

$$f(1),\ f(2),\ \cdots,\ f(26),\ f(27)$$

中最大的一个就行了。这当然可以将这些函数值逐一算出后（见表一的第三列），再求其最大值。但我们可以减少计算量，那就是分析一下在 y 的哪些范围内，$f(y)$ 是单调的。为此，我们计算

$$\begin{aligned}\triangle(y) &= f(y+1) - f(y) \\ &= (y+1)\left[\frac{1000-35(y+1)}{27}\right] - y\left[\frac{1000-35y}{27}\right] \\ &= \left[\frac{965-35y}{27}\right] - y\left\{\left[\frac{1000-35y}{2.7}\right]\right. \\ &\quad \left.-\left[\frac{965-35y}{27}\right]\right\}.\end{aligned} \tag{4}$$

为使　　　　　　　　$\angle(y) > 0$，

这就要求　　$\left[\frac{965-35y}{27}\right] > y\left\{\left[\frac{1000-35y}{27}\right] - \left[\frac{965-35y}{27}\right]\right\}$.

注意　$\frac{1000-35y}{27} - \frac{965-35y}{27} = \frac{35}{27} = 1.296\cdots\cdots$，

所以总有 $1 \leqslant \left[\frac{1000-35y}{27}\right] - \left[\frac{965-35y}{27}\right] \leqslant 2$，　　　　(5)

这样，在 y 为自然数时，

$$Y\left\{\left[\frac{1000-35y}{27}\right] - \left[\frac{965-35y}{27}\right]\right\} \leqslant 2y.$$

所以，如果再有 $\left[\frac{965-35y}{27}\right] > 2y$，　　　　　　　　　　(6)

那么便有 $\triangle(y) > 0$。而(6)式即为

表一

y	$\left(\frac{1000-35y}{27}\right)$	$f(y)=y\left(\frac{1000-35y}{27}\right)$	$\left(\frac{1027-35y}{27}\right)$	$g(y)=y\left(\frac{1027-35y}{27}\right)$
1	35	35	36	36
2	34	68	35	70
3	33	99	34	102
4	31	124	32	128
5	30	150	31	155
6	29	174	30	180
7	27	189	28	196
8	26	208	27	216
9	25	225	26	234
10	24	240	25	250
11	22	242	23	253
12	21	252	22	264
13	20	260	21	273
14	18	252	19	266

续

y	$\left[\frac{1000-35y}{27}\right]$	$f(y)=y\left[\frac{1000-35y}{27}\right]$	$\left[\frac{1027-35y}{27}\right]$	$g(y)-y\left[\frac{1027-35y}{27}\right]$
15	17	255	18	270
16	16	256	17	272
17	15	255	16	272
18	13	234	14	252
19	12	228	13	247
20	11	220	12	240
21	9	189	10	210
22	8	176	9	198
23	7	161	8	184
24	5	120	6	144
25	4	100	5	125
26	3	78	4	104
27	2	54	3	81
28	3		1	28

$$\left[\frac{965-35y}{27}-2y\right]>0,$$

即 $$\frac{965-35y-54y}{27}\geqslant 1,$$

亦即 $$y\leqslant\frac{965-27}{89}=\frac{938}{89}=10.539\cdots\cdots.$$

也即 $1\leqslant y\leqslant 10$

时$\triangle(y)>0$.而为使$\triangle(y)<0$,

这就要求$\left[\frac{965-35y}{27}\right]<y\left\{\left[\frac{1000-35y}{27}\right]-\left[\frac{965-35y}{27}\right]\right\}$.

利用不等式（5）中左边那个不等式，我们得到当y是自然数时

$$y\leqslant y\left\{\left[\frac{1000-35y}{27}\right]-\left[\frac{965-35y}{27}\right]\right\}.$$

如果再有$\left[\frac{965-35y}{27}\right]<y$, （7）

那么便有$\triangle(y)<0$.而(7)式即为

$$\left[\frac{965-35y}{27}-y\right]<0,$$

即 $$\frac{965-35y-27y}{27}<0,$$

亦即 $$y>\frac{965}{62}=15.564\cdots\cdots,$$

也即 $y\geqslant 16$

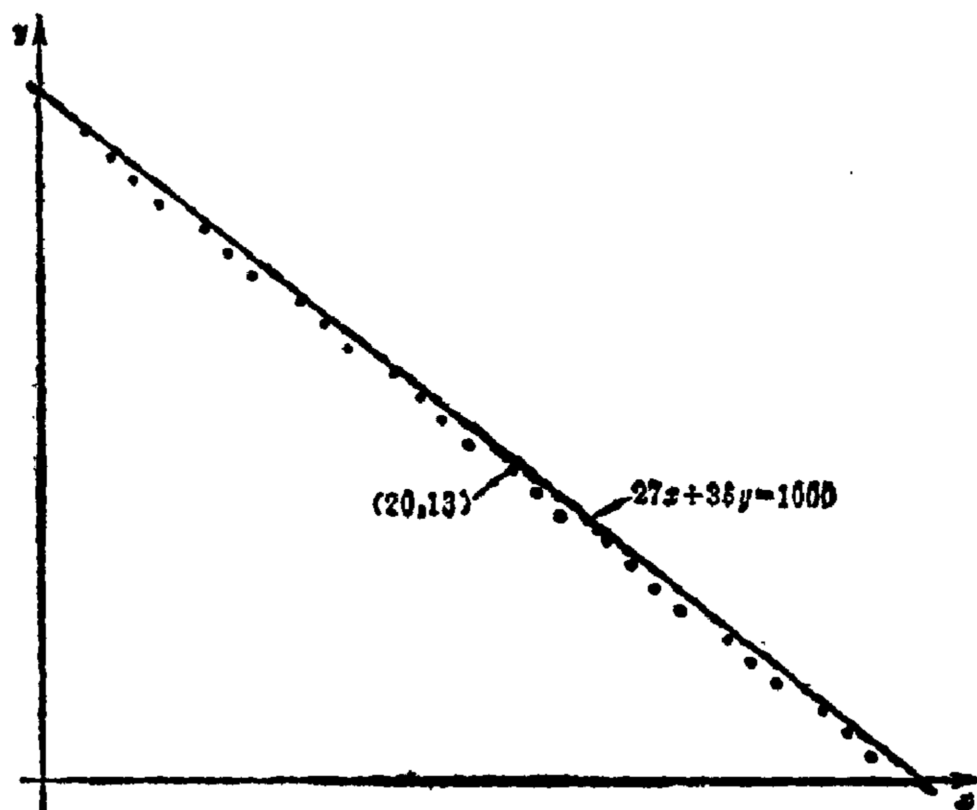
时$\triangle(y)<0$. 这样由上面的讨论可知：$f(y)$当y是[1，10]内的自然数时，是单调增加；而当y是$\geqslant 16$的自然数时，是单调减少，所以

$$
\begin{aligned}
S\text{的最大值} &= \max_{\left(\substack{y\text{是自然数}\\ 1\leqslant y\leqslant 27}\right)}\{f(y)\} \\
&= \max\{f(11),\ f(12),\ f(13),\ f(14),\ f(15),\ f(16)\} \\
&= \max\{242,\ 252,\ 260,\ 252,\ 255,\ 256\} = 260.
\end{aligned}
$$

而这是在$y=13$，$x=\left\lfloor\dfrac{1000-35\times 13}{27}\right\rfloor=\left\lfloor 20.185\cdots\right\rfloor=20$

时取得的。这就是说建造水池的方案是：长20尺，宽13尺，水池面积为260尺^2。而建造费用为$(27\times 20+35\times 13)=995$元。

图一绘出了在xy坐标系内，在约束条件（1）之下最靠近边界的27个点子。



图一

解法二 我们从约束（1）得到

$$1000^2 \geqslant (27x+35y)^2$$
$$=(27x)^2+(35y)^2+2.27x \cdot 35y$$
$$\geqslant 4.27x \cdot 35y = 4 \cdot 27 \cdot 35xy$$

所以 $$S = xy \leqslant \frac{1000^2}{4 \cdot 27 \cdot 35} = 264.55\cdots,$$

因为S一定是自然数，所以

$$S \leqslant 264. \tag{8}$$

从（1）可得　$27x < 1000$，　　$35y < 1000$

即　$x < \frac{1000}{27} = 37.037\cdots$，　$y < \frac{1000}{35} = 28.571\cdots$，

亦即　$x \leqslant 37$，　　$y \leqslant 28$.　　　　（9）

若$S = 264 = 2^3 \cdot 3 \cdot 11$，那末共有以下7种两因子分析法：

$264 = 2 \times 132$，3×88，11×24，4×66，

6×44，22×12，33×8.

据（9），知道只有如下可能：

$(x, y) = (11, 24)$，$(24, 11)$，$(22, 12)$，$(12, 22)$，$(33, 8)$。在每种情况下计算$27x+35y$之值：

$(11, 24)$：$27 \cdot 11 + 35 \cdot 24 = 1137$，

$(24, 11)$：$27 \cdot 24 + 35 \cdot 11 = 1033$，

$(22, 12)$：$27 \cdot 22 + 35 \cdot 12 = 1014$，

$(12, 22)$：$27 \cdot 12 + 35 \cdot 22 = 1094$，

$(33, 8)$：$27 \cdot 33 + 35 \cdot 8 = 1171$.

因为其$27x+35y$之值均大于1000，故无一满足约束（1），所以$S = 264$不可能。

若$S = 263$，因为263是一素数，所以其两因子分析只可能是1×263，据（9）可知$S = 263$不可能。

若$S = 262 = 2 \times 131$，因为131是素数，所以只有这一种两因

子分析法，所以据（9）可知$S=262$亦不可能。

若$S=261=3^2\cdot29$，它只有两种两因子分析法：

$$261=3\times87,\quad 9\times29.$$

据（9），知道只有如下可能：

$$(x,\ y)=(29,\ 9).$$

但其 $27x+35y=27\cdot29+35\cdot9=1098$，

所以$S=261$亦不可能。

若$S=260=2^2\cdot5\cdot13$，它共有以下五种两因子分析法：

$$260=2\times130,\quad 5\times52,\quad 13\times20,\quad 4\times65,\quad 10\times26.$$

据（9），知道只有如下可能：

$$(x,\ y)=(13,20),\ (20,\ 13),\ (10,\ 26),\ (26,\ 10).$$

在每种情况下计算$27x+35y$之值：

$$(13,\ 20):\ 27\cdot13+35\cdot20=1057,$$

$$(20,\ 13):\ 27\cdot20+35\cdot13=995,$$

$$(10,\ 26):\ 27\cdot10+35\cdot26=1180,$$

$$(26,\ 10):\ 27\cdot26+35\cdot10=1052.$$

因此可知只有$(x,\ y)=(20,\ 13)$时是满足约束（1）的。因此我们得到从解法一中所得到的相同结论。

⑥**解** 我们先证明下面的二个命题：

命题甲 从一圆的圆心O出发作四条射线，这四条射线中每相邻两条之间的夹角分别为α_1，α_2，α_3，α_4.那末存在相互垂直的两条直径，使每个象限之内有而且只有一条射线的充要条件是：

$$\begin{cases}0<\alpha_i<\pi, & (1)\\ \dfrac{\pi}{2}<\alpha_i+\alpha_{i+1}, & (2)\end{cases}\quad i=1,\ 2,\ 3,\ 4\ \text{〔注〕}$$

〔注〕 此处α_5即为α_1。

证明 我们从图一中可以看出，这种相互垂直的直径存在的充要条件是存在一个β（这里β是α_2角的一边与直径之一的一侧所夹的角），使

$$\begin{cases} \theta<\beta<\alpha_2, \\ \frac{\pi}{2}<\beta+\alpha_3<\pi, \\ \frac{\pi}{2}<\alpha_1+\alpha_2-\beta<\pi. \end{cases} \tag{3}$$

而与（3）式等价的是

$$\begin{cases} 0<\beta<\alpha_2, \\ \frac{\pi}{2}-\alpha_3<\beta<\pi-\alpha_3, \\ \alpha_1+\alpha_2-\pi<\beta<\alpha_1+\alpha_2-\frac{\pi}{2}. \end{cases} \tag{4}$$

而（4）式是一个不等式组。此不等式组存在解β的充要条件是

$$\max\left(0,\ \frac{\pi}{2}-\alpha_3,\ \alpha_1+\alpha_2-\pi\right)<\min\left(\alpha_2,\ \pi-\alpha_3,\ \alpha_1+\alpha_2-\frac{\pi}{2}\right). \tag{5}$$

而（5）式是等价于这样一系列不等式：

$$\begin{cases} 0<\alpha_2,\ \alpha_1<\pi,\ \alpha_3<\pi, \\ \frac{\pi}{2}<\alpha_2+\alpha_3,\ \ \frac{\pi}{2}<\alpha_1+\alpha_2, \\ \pi<\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3<2\pi. \end{cases} \tag{6}$$

再注意 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=2\pi$,

所以和（6）式等价地有

$$\begin{cases} 0<\alpha_2,\ 0<\alpha_4,\ \alpha_1<\pi,\ \alpha_3<\pi,\ \alpha_4<\pi, \\ \frac{\pi}{2}<\alpha_2+\alpha_3,\ \ \frac{\pi}{2}<\alpha_1+\alpha_2. \end{cases} \tag{7}$$

再注意，如果我们将β角记为α_3角的一边与直径之一的一侧的夹角，重复以上的讨论，等等，那末我们就得到了(1)和(2)。本命题证毕。

图一

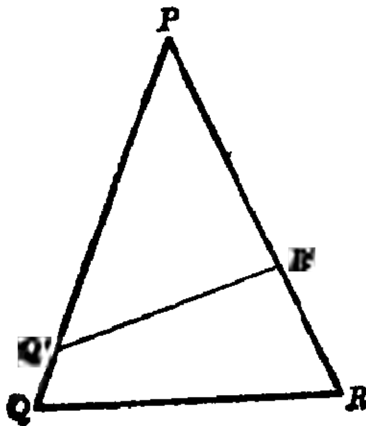
命题乙 若一等腰三角形的顶角不大于60°，那末由一腰上任一点至另一腰上任一点所联结的线段之长一定不比腰的长度大。

证明 若图二中的$\triangle PQR$有$PQ=PR$，而$\angle P\leqslant 60°$。那末若$P'Q'>PQ=PR$，那末更有$Q'R'>PQ'$，$Q'R'>PR'$。这样$\triangle PQ'R'$中$Q'R'$是最大边，故$\angle P$是最大角，但$\angle P\leqslant 60°$，

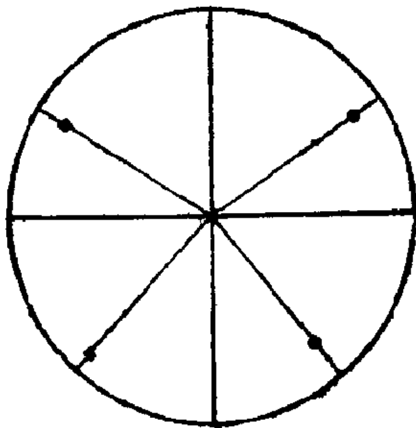
故 $\angle PQ'R'<60°$，$\angle PR'Q'<60°$。

所以 $180°=\angle P+\angle PQ'R'+\angle PR'Q'<60°+60°+60°$
$=180°$。

因此有矛盾。所以$R'Q'$不比腰的长度大。本命题证毕。



图二


图三

现在如果圆内四点每两点之间的距离都大于圆的半径，那末这四点中的任一点都不会在圆心上。这样从圆心到这四点一定可以作出四条确定的射线，从而得到四个圆心角α_1、α_2、

α_3、α_4.（见图三.）因为由命题乙可知，相邻两条射线之间的夹角一定大于60°.所以

$$0 < 60° < \alpha_1,$$

$$90° < 120° = 60° + 60° < \alpha_1 + \alpha_2.$$

再因为 $180° = 60° + 60° + 60° < \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4,$

故 $180° < 360° - \alpha_1,$

因此 $0 < \alpha_1 < \pi, \quad \frac{\pi}{2} < \alpha_1 + \alpha_2$

进行类似的讨论后，即可知α_1，α_2，α_3，α_4是满足命题甲中的要求，因此存在互相垂直的直径，使每一象限内只有一条射线，这样也就在每一象限内只有一点.

⑦**解** 我们用反证法证之。若$f(x) = ax^2 + bx + c$能分解成两个整系数一次式的乘积，即

$$f(x) = ax^2 + bx + c \equiv (\alpha x + \beta)(\gamma x + \delta), \qquad (1)$$

其中 α，β，γ，δ是整数，而且$\alpha \neq 0$，$\gamma \neq 0$. 并注意到若两个整数A、B之积是一个素数，那末一定是下列四种情况之一：

情况甲。 $A = 1$，$B =$ 素数.

情况乙。 $A = -1$，$B = -$ 素数。

情况丙。 $A =$ 素数，$B = 1$.

情况丁。 $A = -$ 素数，$B = -1$。

也就是 $A = 1$，$A = -1$，$B = 1$，$B = -1$

这四种情况必有一发生。今对 $x = 1, 2, 3, 4, 5$，$\alpha x + \beta$与$\gamma x + \delta$ 都是整数. 而因为$f(1)$，$f(2)$，$f(3)$，$f(4)$，$f(5)$都是素数，所以在表一中，对每一行（横向）来说，必有一发生；而现在因为自变量有五种情况，所以必定有一列（竖向）对两个自变量值都成立. 举例来说，若

表一

因子 / x	$\alpha x+\beta=1$	$\alpha x+\beta=-1$	$\gamma x+\delta=1$	$\gamma x+\delta=-1$
$x=1$				
$x=2$				
$x=3$				
$x=4$				
$x=5$				

$$\begin{cases} \alpha x+\beta=1, \\ \alpha x'+\beta=1. \end{cases} \quad (2)$$

其中　　$1\leqslant x,\ x'\leqslant 5$，而且$x\neq x'$

从（2）式得　$\alpha(x-x')=0$，

因　　　$x-x'\neq 0$，

故　　　$\alpha=0$。

而这与原假设（1）相矛盾．所以无论在那一列上若发生了对两个自变量都成立的情况，那末都会得到与（1）中假设相矛盾的结论。因此原假设不成立．本题证毕．

上海市1981年中学数学竞赛题解

初　赛

①**解**　因为在对数

$$\log_A B$$

的定义中，要求$A>0$，和$A\neq 1$，所以本题中要求

$$x>0,\ x\neq 1.$$

再因为 $\log_x 5=\dfrac{\lg 5}{\lg x}$，　$\log_{x^2} 9=\dfrac{\lg 9}{\lg x^2}=\dfrac{\lg 3}{\lg x}$，

$$\log_{x^3} 8=\dfrac{\lg 8}{\lg x^3}=\dfrac{\lg 2}{\lg x},$$

而　　$\lg 5<\lg 6=\lg 2+\lg 3$，

所以在　　$x>1$，即　$\lg x>0$

时我们有

$$\frac{\lg 5}{\lg x}<\frac{\lg 2}{\lg x}+\frac{\lg 3}{\lg x},$$

在$x>1$时，　　$f(x)<g(x)$；

而在　　$0<x<1$，即　$\lg x<0$

时我们有　$\dfrac{\lg 5}{\lg x}>\dfrac{\lg 2}{\lg x}+\dfrac{\lg 3}{\lg x}$，

所以在　$0<x<1$时

$$f(x)>g(x).$$

②**解**　设AB边上的高为CD，这样CD = h. 再因为∠C是钝角，所以高CD一定落在△ABC之内，亦即D点在线段AB内.（见图一）. 再设∠ACD = α，∠BCD = β. 这样

$$0<\alpha<\frac{\pi}{2},\qquad 0<\beta<\frac{\pi}{2},\tag{1}$$

由题意知　$\dfrac{\pi}{2}<\alpha+\beta<\pi$.　　(2)

现要证　$AD+DB>2h$，　　(3)

因为　　$AD=h\operatorname{tg}\alpha$，$BD=h\operatorname{tg}\beta$，

故(3)等价为　$h(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)>2h$，

亦即　　$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta>2$.　　(4)

注意　$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$，　　(5)

今因$\alpha+\beta$是钝角，故知　$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)<0$。

但由(1)知　　$\operatorname{tg}\alpha>0$，$\operatorname{tg}\beta>0$，

所以　　$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta>0$。

从(5)可知　$1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\leqslant 0$。

但　　$1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=0$

是不可能成立的，那是因为若成立，那末

$$\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{ctg}\beta=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right).$$

由条件(1)知，从上式可得

$$\alpha=\frac{\pi}{2}-\beta,$$

亦即　　$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$，

而这与$\angle C$是钝角相矛盾．所以如今

$$1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta<0,$$

亦即　　$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta>1$，

因　　$\operatorname{tg}\alpha>0$，

故　　$\operatorname{tg}\beta>\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha$，

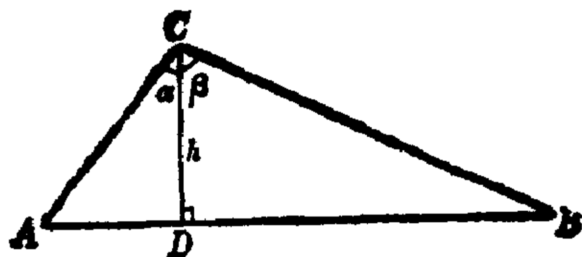
因此　　$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta>\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=\operatorname{tg}\alpha+\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\geqslant 2$.

这是因为对任何　$G>0$，

$$G+\frac{1}{G}=(\sqrt{G})^2+\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\right)^2\geqslant 2\sqrt{G}\frac{1}{\sqrt{G}}=2.$$

因此　　$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta>2$，

亦即(4)式成立，故(3)式成立。



图一

③解　由P点向正方形$ABCD$作高，设垂足为Q，$PQ=h$。因为是一正四棱锥，所以Q点一定是正方形$ABCD$的中心。再在侧面PAB和PBC中，由P点分别向AB和BC作高，设垂足分别为R、S。再由R点在$\triangle PRB$内向PB边作高，设其垂足为E。因为两个直角三角形PRB和PSB是恒等的，所以由S点在$\triangle PSB$内向PB边作高，其垂足亦必定是E点。(见图一)。因为棱PB既垂直RE，亦垂直SE，所以$\angle RES$一定是两侧面间的夹角β。再因为$\triangle RES$是一个等腰△($RE=SE$)，所以由余弦定理可知

$$\cos\beta=\frac{2RE^2-RS^2}{2RE^2},\qquad(1)$$

今联结QR、QS。因为R、S分别是AB和BC的中点，所以$QR\perp AB$，$QS\perp BC$。所以四边形$QRBS$是一个正方形，其每边长为$\frac{a}{2}$。(设正方形$ABCD$每边长为a)。所以

$$RQ=\frac{a}{2},$$

$$PR=\sqrt{h^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2},\quad \cos\alpha=\frac{\frac{a}{2}}{\sqrt{h^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}}.$$

因为$\triangle PRB$是直角三角形，RE是斜边上的高，所以(见图二)

$$RE\cdot PB=PR\cdot RB,$$

即 $$RE=\frac{PR\cdot RB}{PB}.$$

因 $$RB=\frac{a}{2},$$

$$PB=\sqrt{PR^2+RB^2}$$

$$=\sqrt{h^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\sqrt{h^2+\frac{a^2}{2}}$$

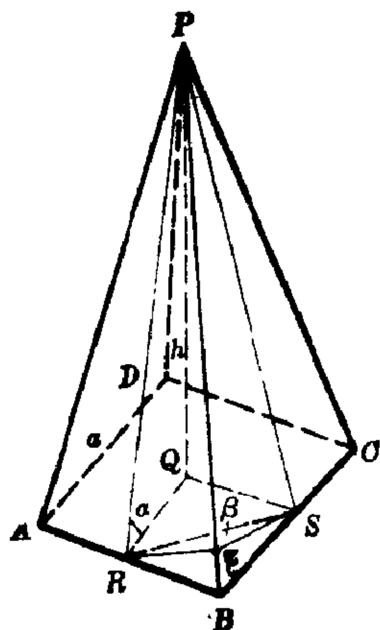
所以 $$RE=\frac{\sqrt{h^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}\cdot\frac{a}{2}}{\sqrt{h^2+\frac{a^2}{2}}}=\frac{a\sqrt{h^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}}{2\sqrt{h^2+\frac{a^2}{2}}}.$$

而 $$RS=\sqrt{2}\,RQ=\sqrt{2}\cdot\frac{a}{2}=\frac{a}{\sqrt{2}}.$$

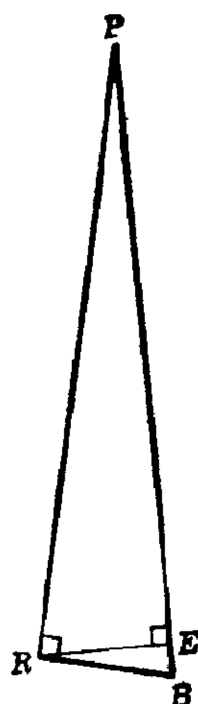
由(1)可知 $$\cos\beta=\frac{2\left(\frac{a\sqrt{h^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}}{2\sqrt{h^2+\frac{a^2}{2}}}\right)^2-\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2}{2\left(\frac{a\sqrt{h^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}}{2\sqrt{h^2+\frac{a^2}{2}}}\right)^2}$$

$$=-\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2}{h^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}=-\cos^2\alpha,$$

因此 $$\cos\beta=-\cos^2\alpha$$



图一



图二

④解 因为 $\sum\limits_{k=1}^{j} k = \dfrac{j(j+1)}{2}$,

所以 $$\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{2}{j}\sum_{k=1}^{j} k\right) = \sum_{j=1}^{m}\frac{2}{j}\cdot\frac{j(j+1)}{2} = \sum_{j=1}^{m}(j+1)$$

$$=\sum_{j=2}^{m+1} j = \frac{(m+1)(m+2)}{2} - 1 = \frac{m(m+3)}{2}.$$

因此 $$\sum_{m=1}^{n}\left\{\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{2}{j}\sum_{k=1}^{j} k\right)\right\}$$

$$=\sum_{m=1}^{n}\frac{m(m+3)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n} m^2 + \frac{3}{2}\sum_{m=1}^{n} m$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{3}{2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=\frac{n(n+1)}{4}\left(\frac{2n+1}{3}+3\right) = \frac{n(n+1)}{4}\cdot\frac{2(n+5)}{3}$$

$$=\frac{n(n+1)(n+5)}{6}.$$

由题意，我们得到关于n的代数方程

$$\frac{n(n+1)(n+5)}{6}=275,$$

即 $\qquad n(n+1)(n+5)=1650,$

亦即 $\qquad (n-10)(n^2+16n+165)=0,$

因为 $\quad n^2+16n+165=0$

的判别式 $\qquad 16^2-4\cdot165=-404<0,$

所以方程 $\quad n^2+16n+165=0$

无实根，因此一定有 $\quad n=10$。

⑤**解** 因为当n为偶数时

$$(1+x)^n\equiv1+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\cdots+\binom{n}{n}x^n,$$

$$(1-x)^n\equiv1-\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2-\cdots+\binom{n}{n}x^n$$

所以 $\qquad (1+x)^n-(1-x)^n$

$$=2\left[\binom{n}{1}x+\binom{n}{3}x^3+\cdots+\binom{n}{n-1}x^{n-1}\right].$$

在上式中令$x=1$，即得到

$$2^n=2\left[\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\cdots+\binom{n}{n-1}\right],$$

亦即 $\qquad 2^{n-1}=\frac{n!}{1!(n-1)!}+\frac{n!}{3!(n-3)!}+\cdots+\frac{n!}{(n-1)!1!},$

因此 $\qquad \frac{2^{n-1}}{n!}=\frac{1}{1!(n-1)!}+\frac{1}{3!(n-3)!}+\cdots+\frac{1}{(n-1)!1!}.$

⑥**解** 我们要利用抛物线的下列性质：

(i) 抛物线上任一点到焦点（它位于对称轴上）的距离等于该点到准线的距离；

(ii) 设抛物线的焦点为F，过抛物线上任一点P到其准线作垂线，设垂足是D。再设有向线段$\overrightarrow{DP}$方向的射线是PD'．那么$\angle FPD'$的角平分线一定是过P点的法线．

今设所求抛物线与直线$2y+3=0$，即$y=-\frac{3}{2}$，的切点是P。因为切点一定在切线上，所以P点的坐标是

$$\left(x_0,\ -\frac{3}{2}\right),$$

今求x_0的值，从P点向准线$x-2y-5=0$作垂线，其垂足是D，注意直线$2x+y-1=0$与直线$x-2y-5=0$是垂直的，所以

$$\overrightarrow{DP} \parallel \text{直线} 2x+y-1=0.$$

设$\overrightarrow{DP}$方向的射线是PD'，过P点作直线$y=-\frac{3}{2}$的垂直线PE（见图一），再作$\angle EPF=\angle EPD'$，又设PF与直线$2x+y-1=0$的交点就是F。由前述的(ii)知，F点一定是此抛物线的焦点。又由(i)知

$$PD=PF. \qquad (1)$$

注意直线DD'的斜率就是直线$2x+y-1=0$的斜率，亦即是-2。所以直线PF的斜率是2．这样过P点的直线PF的方程为

$$\left(y+\frac{3}{2}\right)=2(x-x_0).$$

因此F点的坐标就是下列方程组的解：

$$\begin{cases} y+\frac{3}{2}=2(x-x_0), \\ 2x+y-1=0. \end{cases}$$

而其解为
$$\begin{cases} x=\frac{5}{8}+\frac{x_0}{2}, \\ y=-\frac{1}{4}-x_0. \end{cases} \qquad (2)$$

而从点P到直线$x-2y-5=0$的距离为

$$\frac{\left|x_0-2\left(-\frac{3}{2}\right)-5\right|}{\sqrt{5}}=\frac{|x_0-2|}{\sqrt{5}}.$$

所以从(1)式得到关于x_0的方程：

$$\sqrt{\left(x_0-\frac{5}{8}-\frac{x_0}{2}\right)^2+\left(-\frac{3}{2}+\frac{1}{4}+x_0\right)^2}=\frac{|x_0-2|}{\sqrt{5}}.$$

经整理后得到

$$\frac{1}{4}\left(x_0-\frac{5}{4}\right)^2+\left(x_0-\frac{5}{4}\right)^2=\frac{(x_0-2)^2}{5},$$

亦即 $$\frac{5}{2}\left|x_0-\frac{5}{4}\right|=|x_0-2|. \tag{3}$$

而方程(3)有两个解，其一是

$$\frac{5}{2}\left(x_0-\frac{5}{4}\right)=x_0-2,$$

亦即是 $x_0=\frac{3}{4}$;

另一是 $\frac{5}{2}\left(x_0-\frac{5}{4}\right)=2-x_0,$

亦即是 $x_0=\frac{41}{28}.$

对应于$x_0=\frac{3}{4}$的切线上的点记为P_1，焦点为F_1。那末由(2)式知$F_1(1,\ -1)$；而对应于$x_0=\frac{41}{28}$的切线上的点记为P_2，焦点为F_2，那末亦由(2)式知

$$F_2\left(\frac{9}{14},\ -\frac{12}{7}\right).$$

（见图二）。再由P_1、P_2分别向准线作垂线，垂足分别为D_1和D_2。由图二上看到，$\angle D_1P_1F_1$的角平分线才是抛物线的法线；而$\angle D_2P_2F_2$的角平分线却是切线！所以P_2点不合要求。所以我们所求的抛物线其焦点是$F_1(1, -1)$，准线是$x-2y-5=0$，因此其方程为

$$\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}=\frac{|x-2y-5|}{\sqrt{5}},$$

亦即为 $(x-1)^2+(y+1)^2=\frac{1}{5}(x-2y-5)^2$，

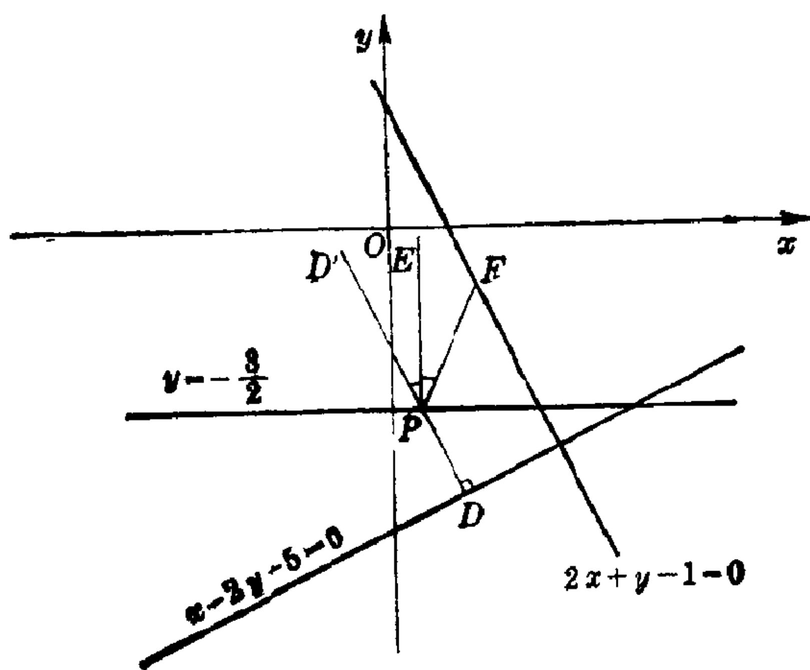
整理后为 $4x^2+4xy+y^2-10y-15=0$

亦为 $(2x+y)^2=10y+15$。

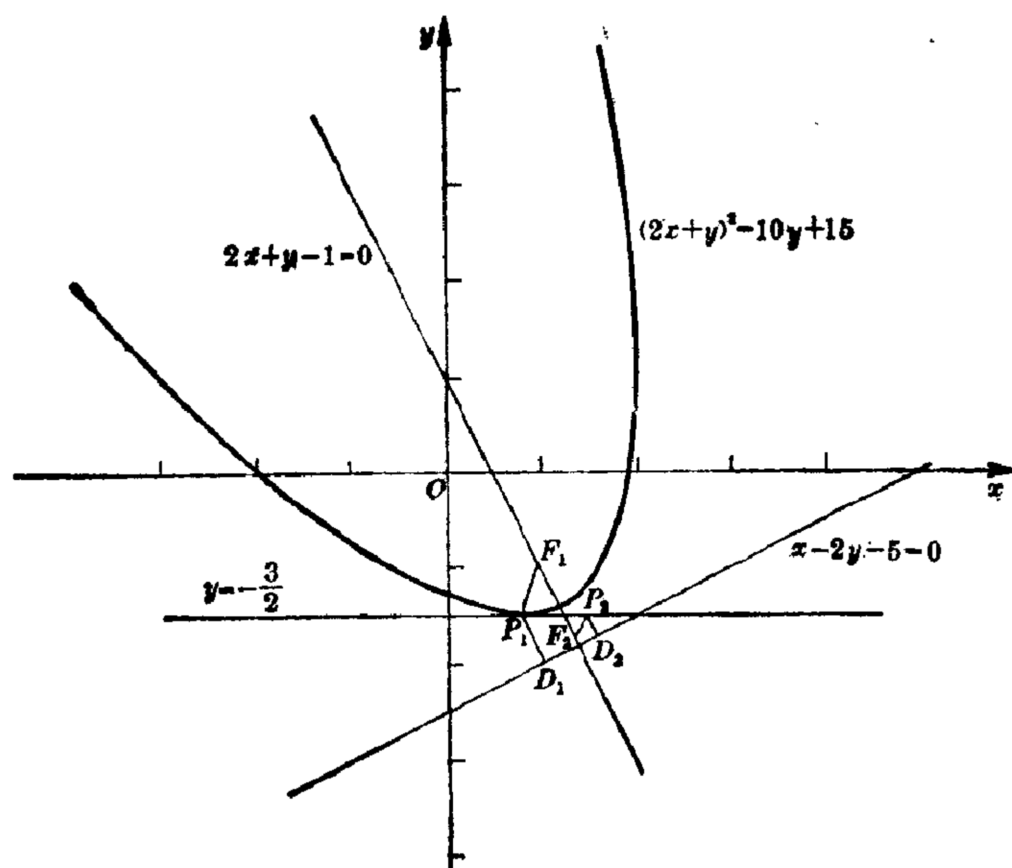
因此该抛物线的焦点到准线的距离

$$p=\frac{|1-2(-1)-5|}{\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

而顶点坐标为$\left(\frac{6}{5}, -\frac{7}{5}\right)$。



图一



图二

⑦**解** 注意

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma$$

$$=(\alpha+\beta+\gamma)$$

$$(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\alpha\gamma).$$

再由根与系数的关系可得

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=-\sin\theta, \\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\sin 2\theta, \\ \alpha\beta\gamma=-\sin 3\theta. \end{cases}$$

因此由题意

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix} > 0$$

可得 $\quad (-\sin\theta)[(-\sin\theta)^2 - 3\sin 2\theta] > 0,$

因此 $\quad \sin^2\theta(-\sin\theta + 6\cos\theta) > 0.$

上式等价于 $\quad \sin\theta \neq 0 \quad$ 与 $\quad -\sin\theta + 6\cos\theta > 0,$

亦即为 $\quad \sin\theta \neq 0 \quad$ 与 $\quad \sqrt{37}\sin(\theta+\varphi) > 0,$

其中 $\quad \varphi = \arccos\left(\frac{-1}{\sqrt{37}}\right) \approx 99°27'54''.$

所以θ的范围是

$$-\varphi + k\cdot 360° < \theta < k\cdot 360°$$

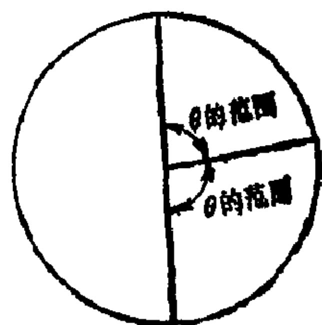
或 $\quad k\cdot 360° < \theta < 180° - \varphi + k\cdot 360°,$

其中k是任意整数．或者近似地有

$$-99°27'45'' + k\cdot 360° < \theta < k\cdot 360°$$

或 $\quad k\cdot 360° < \theta < 80°32'15'' + k\cdot 360°.$

(见图一)．



图一

⑧**解** 我们不妨设

$$\arg z_1 = \alpha = 0. \qquad (1)$$

这是因为如果(1)式不成立，那么我们置

$$z_j' = z_j \cdot e^{-i\alpha}, \quad j = 1, 2, 3.$$

则仍有 $\quad |z_1'| = 1, \quad |z_2'| = k, \quad |z_3'| = 2 - k,$

$$z_1' + z_2' + z_3' = 0$$

而 $\quad \beta - \gamma = \arg z_2 - \arg z_3 = (\arg z_2 - \alpha) - (\arg z_3 - \alpha)$

$$= \arg z'_2 - \arg z'_3,$$

但 $\quad \arg z'_1 = 0.$

再从 $\quad z_1 + z_2 + z_3 = 0$

可知(见图一)，z_1，z_2，z_3构成一个封闭三角形，所以$|z_1|$，

$|z_2|$，$|z_3|$是一个三角形的三条边，所以有

$$|k-(2-k)|<1<k+(2-k),$$

即
$$\frac{1}{2}<k<\frac{3}{2}. \tag{2}$$

从
$$z_1+z_2+z_3=0$$

中分离实部和虚部，我们便得到

$$\begin{cases}1+k\cos\beta+(2-k)\cos\gamma=0, & (3)\\ k\sin\beta+(2-k)\sin\gamma=0. & (4)\end{cases}$$

从(4)得到
$$k^2\sin^2\beta=(2-k)^2\sin^2\gamma,$$

即
$$k^2(1-\cos^2\beta)=(2-k)^2(1-\cos^2\gamma),$$

因此
$$k^2\cos^2\beta-(2-k)^2\cos^2\gamma=k^2-(2-k)^2$$
$$=4k-4.$$

从而
$$[k\cos\beta+(2-k)\cos\gamma][k\cos\beta-(2-k)\cos\gamma]$$
$$=4(k-1).$$

由(3)即得
$$k\cos\beta-(2-k)\cos\gamma=4(1-k).$$

这样连同(3)式，便得到关于$\cos\beta$和$\cos\gamma$的线性方程组

$$\begin{cases}k\cos\beta+(2-k)\cos\gamma=-1,\\ k\cos\beta-(2-k)\cos\gamma=4(1-k)\end{cases}$$

解之得到
$$\cos\beta=\begin{vmatrix}-1 & 2-k\\ 4(1-k) & -(2-k)\end{vmatrix}\Bigg/\begin{vmatrix}k & 2-k\\ k & -(2-k)\end{vmatrix}$$

$$=\frac{(2-k)-4(1-k)(2-k)}{k(-2+k-2+k)}=\frac{3-4k}{2k}, \tag{5}$$

$$\cos\gamma=\begin{vmatrix}k & -1\\ k & 4(1-k)\end{vmatrix}\Bigg/\begin{vmatrix}k & 2-k\\ k & -(2-k)\end{vmatrix}=\frac{k(4-4k+1)}{-2k(2-k)}$$

$$=\frac{4k-5}{2(2-k)}. \tag{6}$$

因此 $\sin^2\beta=1-\cos^2\beta=1-\left(\frac{3-4k}{2k}\right)^2$

$$=\frac{3(2k-1)(3-2k)}{4k^2}. \tag{7}$$

$$\sin^2\gamma=1-\cos^2\gamma=1-\left(\frac{4k-5}{2(2-k)}\right)^2$$

$$=\frac{3(2k-1)(3-2k)}{4(2-k)^2}. \tag{8}$$

再因为从(4)式可见：$\sin\beta>0$与$\sin\gamma>0$同时成立是不可能的，$\sin\beta<0$与$\sin\gamma<0$同时成立也是不可能的．所以一定有 $\sin\beta\sin\gamma<0$，

因此 $$\sin\beta\sin\gamma=\left(\pm\sqrt{\frac{3(2k-1)(3-2k)}{4k^2}}\right)\cdot\left(\mp\sqrt{\frac{3(2k-1)(3-2k)}{4(2-k)^2}}\right)$$

$$=-\frac{3(2k-1)(3-2k)}{4k(2-k)} \tag{9}$$

这样我们从(5)，(6)，(7)，(8)，(9)便可计算得到

$$\sin^2(\beta-\gamma)=(\sin\beta\cos\gamma-\cos\beta\sin\gamma)^2$$

$$=\sin^2\beta\cos^2\gamma+\cos^2\alpha\sin^2\gamma-2\sin\beta\text{coi}\beta\sin\gamma\cos\gamma$$

$$=\frac{3(2k-1)(3-2k)}{4k^2\cdot4(2-k)^2}[(4k-5)^2+(3-4k)^2+2(3-4k)(4k-5)]$$

$$=\frac{3(2k-1)(3-2k)}{4k^2(2-k)^2}. \tag{10}$$

而从(10)得 $\sin^2(\beta-\gamma)=\dfrac{3(2k-1)(3-2k)}{4k^2(2-k)^2}$

$$=\frac{3}{4k^2}\left(2+\frac{3}{k-2}\right)\left(-2-\frac{1}{k-2}\right)$$

$$=\frac{3}{4k^2}\left(-\frac{3}{(k-2)^2}-\frac{8}{k-2}-4\right)$$

$$=\frac{3}{4}\left(-\frac{3}{k^2(2-k)^2}+\frac{4}{k(2-k)}\right),$$

因此若令 $x=\dfrac{1}{k(2-k)}$,

那么 $\sin^2(\beta-\gamma)=\dfrac{3}{4}(-3x^2+4x)=\dfrac{3}{4}x(4-3x)$。

如果将k作为自变量，那么函数$k(2-k)$的图形如图二所示；又如果将x作为自变量，那么函数$x(4-3x)$的图形又如图三所示。因为

$$\frac{1}{2}<k<\frac{3}{2},$$

所以 $\dfrac{3}{4}<k(2-k)\leqslant 1$,

因此 $1\leqslant x=\dfrac{1}{k(2-k)}<\dfrac{4}{3}$,

所以 $0<x(4-3x)\leqslant 1$。

因此 $0<\sin^2(\beta-\gamma)\leqslant\dfrac{3}{4}$。

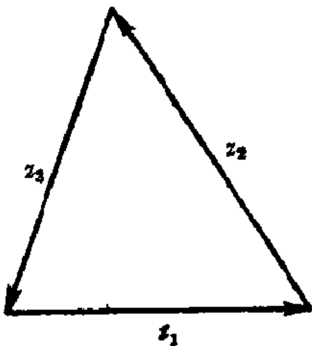
因此$\sin^2(\beta-\gamma)$的最大值是$\dfrac{3}{4}$。而且从上面的讨论中可看出此最大值是在$k=1$之下得到的，而又从(5)、(6)两式可知在最大

值情况下有

$$\cos\beta = -\frac{1}{2}, \qquad \cos\gamma = -\frac{1}{2}.$$

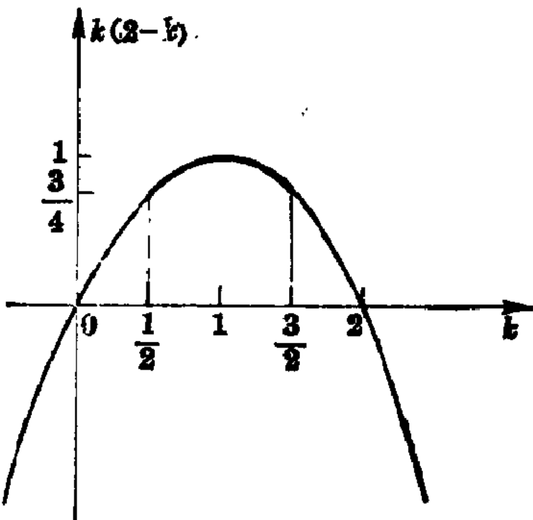
再因为 $\sin\beta\sin\gamma < 0,$

所以总共有两种情况，即

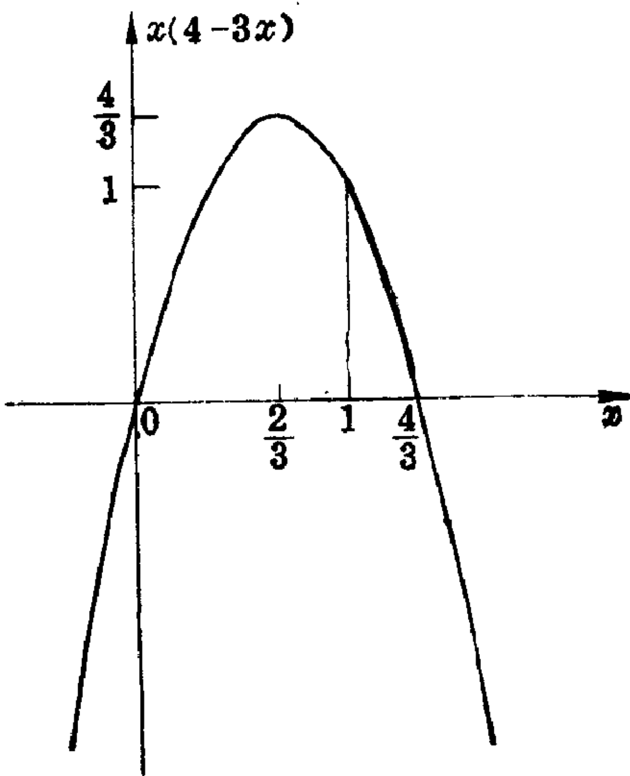


$|z_1| = 1, \quad |z_2| = k, \quad |z_3| = 2-k$

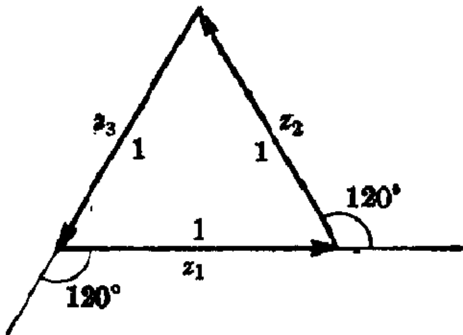
图一



图二



图三



图四

图五

图六

$$\begin{cases}\beta=120^\circ,\\ \gamma=-120^\circ\end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases}\beta=-120^\circ,\\ \gamma=120^\circ.\end{cases}$$

这两种情况分别由图四、图五绘出。

复　　赛

①**解**　我们先将n个连续相继的奇数之和求出来。设N是非负整数，那么

$$\underbrace{(2N+1)+(2N+3)+(2N+5)+\cdots+(2N+2n-1)}_{n项}$$

$$=n\cdot 2N+(1+3-5+\cdots+2n-1)$$

$$=n\cdot 2N+n\cdot\frac{(1+2n-1)}{2}=2nN+n^2.$$

今为使　　$2nN+n^2=n^k$，

故　　$$N=\frac{n^2(n^{k-2}-1)}{2n}=\frac{n(n^{k-2}-1)}{2}. \qquad (1)$$

现在只要证明(1)式中的N确实是一个非负整数就行了。注意$k-2\geqslant 0$，故$n^{k-2}-1\geqslant 0$。此外若n是偶数，则$\frac{N}{2}$是自然数；而若n是奇数时，因

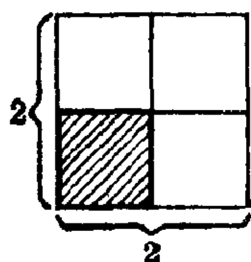
$$n \equiv 1 \pmod 2,$$

故 $$n^{k-2} \equiv 1 \pmod 2,$$

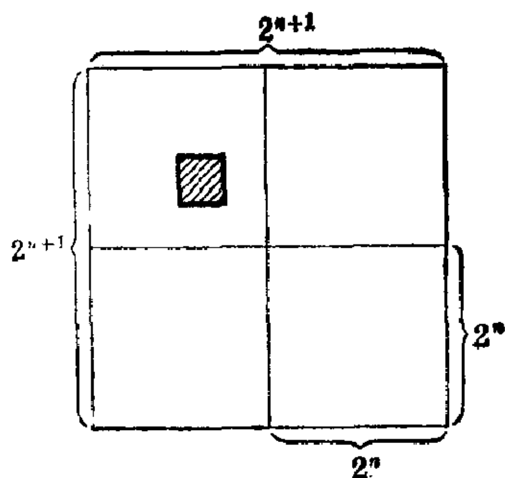
因此 $$n^{k-2}-1$$

能被 2 整除.本题证毕.

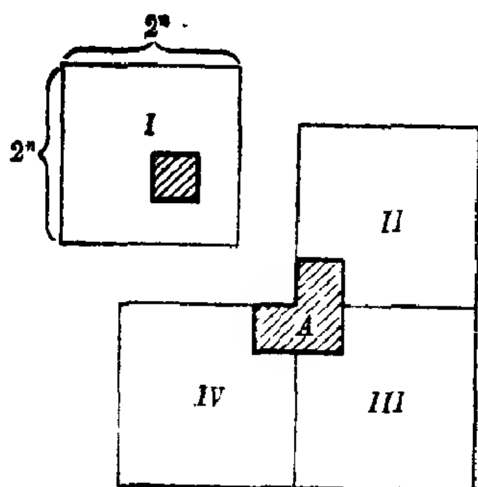
②**解** 我们用归纳法来证明，命题在$n=1$时显然成立(见图一).设命题在n时成立，欲证命题在$n+1$时成立，今对边长为2^{n+1}的正方形,用边长为2^n的正方形一分为四(见图二).那么挖去的边长为 1 的小正方形必定在四个边长为2^n的正方形某一之中,譬如说在Ⅰ之中(见图三).而由剩下的三个边长为2^n的正



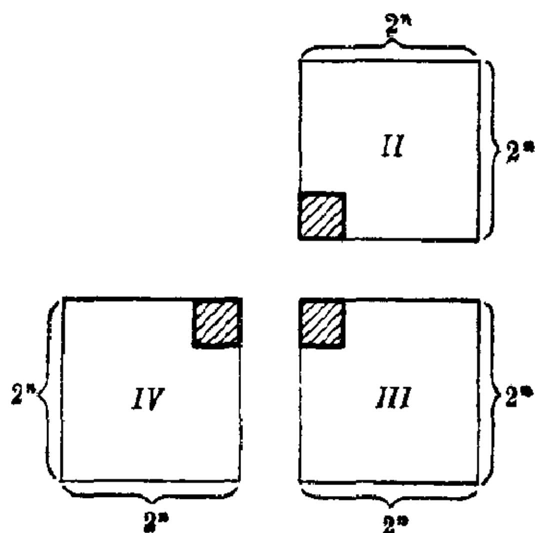
图一



图二



图三



图四

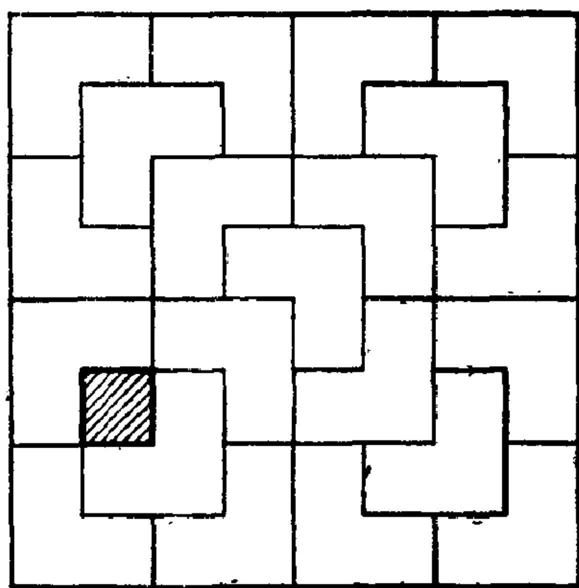
方形Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ所组成的L形几何图形中再在凹口处挖掉一个L形的覆盖单元A(见图三)．而这样从每个正方形Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ来看，都相当于挖去了一个边长为一的小正方形(见图四)，所以这样

边长为2^{n+1}的正方形挖去一个边长为1的小方块

$$=\sum_{B=\text{Ⅰ},\text{Ⅱ},\text{Ⅲ},\text{Ⅳ}} \text{边长为}2^n\text{的正方形}B\text{挖去一个边长为1的小方块}$$

$$+A. \qquad (1)$$

因为命题在n时成立，所以正方形Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ在各挖去了边长为1的小方块后都能被L形的覆盖单元所覆盖，所以由（1）式可知，原边长为2^{n+1}的正方形在挖去一边长为1的小方块后，能被L形的覆盖单元所覆盖．即命题于$n+1$时成立．图五绘出了$n=3$时的一种复盖情况．



图五

③解　注意

$$\frac{n^3-1}{n^3+1}=\frac{(n-1)(n^2+n+1)}{(n+1)(n^2-n+1)},$$

$$\frac{(n-1)^3-1}{(n-1)^3+1}=\frac{(n-2)(n^2-n+1)}{n(n^2-3n+1)}.$$

因此 $\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdot\cdots\cdot\frac{n^3-1}{n^3+1}$

$$=\frac{(2-1)(2^2+2+1)}{(2+1)(2^2-2+1)}\cdot\frac{(3-1)(3^2+3+1)}{(3+1)(3^2-3+1)}$$

$$\cdot\cdots\cdot\frac{(n-2)(n^2-n+1)}{n(n^2-3n+2)}\cdot\frac{(n-1)(n^2+n+1)}{(n+1)(n^2-n+1)}$$

$$=\frac{(2-1)(3-1)\cdots(n-2)(n-1)}{(2+1)(3+1)\cdots n(n+1)}$$

$$\cdot\frac{(2^2+2+1)(3^2+3+1)\cdots(n^2-n+1)(n^2+n+1)}{(2^2-2+1)(3^2-3+1)\cdots(n^2-3n+2)(n^2-n+1)}$$

$$=\frac{(2-1)(3-1)}{n(n+1)}\cdot\frac{n^2+n+1}{2^2-2+1}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}}$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdot\cdots\cdot\frac{n^3-1}{n^3+1}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{3}\cdot\frac{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}}=\frac{2}{3}.$$

④**解** （i） 观察二次方程

$$ax^2+bx-1=0. \tag{1}$$

在 $a\neq0,\qquad b^2+4a\geqslant0$

时，它有两个非零实根

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2+4a}}{2a}.$$

x之所以不为零，是因为若将$x=0$代入（1）式，即得到矛盾. 这样我们令

$$x_1=x_2=x_3=x_4=x,$$
那么此组数值一定是原方程组的一组非零实数解。

(ii) 我们用反证法证之。若在$b^2+4a<0$时有非零实数解x_1，x_2，x_3，x_4。那么x_1，x_2，x_3，x_4中无一为零。若x_1，x_2，x_3，x_4中某一为零，譬如说$x_1=0$。那末由第一个方程得$x_2=0$，再由第二个方程得$x_3=0$，…所以$x_1=x_2=x_3=x_4=0$，而这与原设矛盾。这样我们有

$$\frac{ax_1^4+bx_1^3}{x_1^2}=\frac{x_2^2}{x_1^2},$$

从而有 $$\frac{x_2^2}{x_1^2}-1=ax_1^2+bx_1-1=a(x_1^2+\frac{b}{a}x_1-\frac{1}{a})$$

$$=a\left[(x_1+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2+4a}{4a^2}\right]. \qquad (2)$$

因为 $$b^2+4a<0$$

因此 $$a<-\frac{b^2}{4}\leqslant 0,$$

即 $$a<0.$$

故从(2)有 $$\frac{x_2^2}{x_1^2}-1<0.$$

所以 $$|x_2|<|x_1|.$$

对原方程组的第二、第三、第四个方程进行类似的讨论，则可得到

$$|x_3|<|x_2|,\quad |x_4|<|x_3|,\quad |x_1|<|x_4|.$$

这样 $$|x_1|>|x_2|>|x_3|>|x_4|>|x_1|,$$

故 $$|x_1|>|x_1|,$$

这就得到了矛盾。所以$b^2+4a<0$时原方程组无非零实数解。

⑤解 由解析几何知识可知，若两直线的方程分别为

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$

与
$$\frac{x-x_0'}{l'}=\frac{y-y_0'}{m'}=\frac{z-z_0'}{n'},$$

那么此二直线之间的距离为

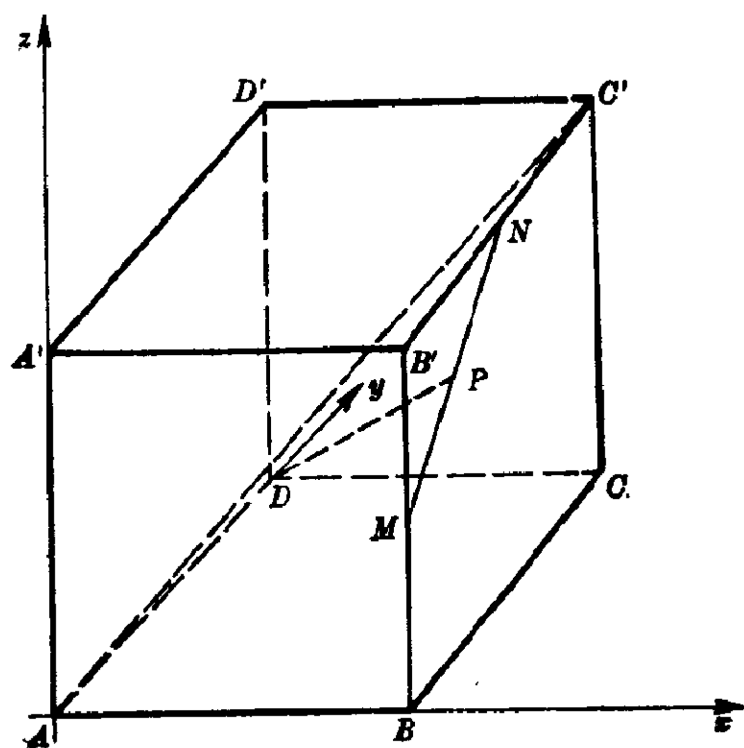
$$d=\frac{\left|\begin{vmatrix} x_0'-x_0 & y_0'-y_0 & z_0'-z_0 \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix}\right|}{\sqrt{(l^2+m^2+n^2)(l'^2+m'^2+n'^2)-(ll'+mm'+nn')^2}}$$

今在此正方体上建立坐标系如图一所示，这样

$B(1,0,0)$，　　$D(0,1,0)$，

$B'(1,0,1)$，　　$C'(1,1,1)$，

$M(1,0,\frac{1}{2})$，　　$N(1,\frac{1}{2},1)$，.



图一

$$P(1,\frac{1}{4},\frac{3}{4}),\quad A(0,0,0).$$

这样直线AC'的方程为

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1};$$

直线DP的方程为

$$\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-\frac{3}{4}}=\frac{z}{\frac{3}{4}}$$

因此此二直线间的距离为

$$d=\frac{\left|\begin{vmatrix}0 & 1 & 0\\1 & 1 & 1\\1 & -\frac{3}{4} & \frac{3}{4}\end{vmatrix}\right|}{\sqrt{(1^2+1^2+1^2)[1^2+(-\frac{3}{4})^2+(\frac{3}{4})^2]-(1-\frac{3}{4}+\frac{3}{4})^2}}$$

$$=\frac{1-\frac{3}{4}}{\sqrt{3(1+\frac{9}{8})-1}}=\frac{\frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{43}{8}}}=\frac{1}{\sqrt{86}}=\frac{\sqrt{86}}{86}\approx 0.1078$$

⑥**解** 因双曲线是等轴双曲线，因此可以以此双曲线的两条互相垂直的渐近线为坐标轴，而在此坐标系F，双曲线的方程为

$$xy=a^2 \tag{1}$$

所以，如果以此双曲线上两点 $A_1(x_1y_1)$，$A_2(x_2y_2)$为直径作一圆，而此圆与该双曲线又相交于 $A_3(x_3,y_3)$点时，因为A_1A_2是直径，因此$\angle A_1A_3A_2$是立在直径A_1A_2上的圆周角，因此 $\overrightarrow{A_1A_3}\perp\overrightarrow{A_2A_3}$。

而今 $\overrightarrow{A_1A_3}=(x_3-x_1, y_3-y_1)$， $\overrightarrow{A_2A_3}=(x_3-x_2, y_3-y_2)$，

所以 $(x_3-x_1)(x_3-x_2)+(y_3-y_1)(y_3-y_2)=0$ (2)

但注意 $y_i=\dfrac{a^2}{x_i}$， $i=1,2,3$，

(2)可化为 $(x_3-x_1)(x_3-x_2)+\left(\dfrac{a^2}{x_3}-\dfrac{a^2}{x_1}\right)\left(\dfrac{a^2}{x_3}-\dfrac{a^2}{x_2}\right)=0$，

也就是 $(x_3-x_1)(x_3-x_2)\left(1+\dfrac{a^4}{x_1x_2x_3^2}\right)=0$

因为 $x_3\neq x_1$ $x_3\neq x_2$

（否则就有$y_3=y_1$或$y_3=y_2$，从而A_3要与A_1或A_2相合。）所以

$$1+\frac{a^4}{x_1x_2x_3^2}=0,$$

也就是 $x_1x_2x_3^2=-a^4$

从以上讨论，我们得到以下结论：

甲．只有当A_1，A_2两点分别位于等轴双曲线不同的两支上时，以A_1A_2为直径所作的圆才有可能与此双曲线有相异于A_1、A_2的交点A_3。

这是因为从(3)式得知 $x_1x_2<0$，

所以x_1与x_2是有相反的符号，亦即A_1、A_2点必定分别在双曲线不同的两支上．

乙．当A_1、A_2分别位于等轴双曲线不同的两支上时，以A_1A_2为直径所作的圆一定与原双曲线有相异的两交点（见图一）， $A_3(x_3, y_3)$，$A_4(x_4, y_4)$，

其中 $\begin{cases} x_3=-\dfrac{a^2}{\sqrt{-x_1x_2}}, \\ y_3=-\sqrt{-x_1x_2}, \end{cases}$ $\begin{cases} x_4=\dfrac{a^2}{\sqrt{-xx_2}}, \\ y_4=\sqrt{-x_1x_2}, \end{cases}$ (4)

因为点A_3和A_4是中心对称于原点0的，亦即它们中心对称于双曲线的对称中心，所以A_3，0，A_4三点在一直线上，亦即A_3A_4是双曲线的直径，这也就证明了本题的（i）。

再因为过双曲线上任一点的切线被渐近线所夹的线段的中点就是该切点，所以过等轴双曲线$A_3(x_3y_3)$点的切线与两坐标轴的交点为$(2x_3,\ 0)$与$(0,\ 2y_3)$（见图二）．因此过$A_3(x_3y_3)$点的切线方程为

$$\frac{x}{2x_3}+\frac{y}{2y_3}=1$$

亦即此切线的斜率为 $-\frac{y_3}{x_3}$

而圆的直径A_1A_2的斜率是

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

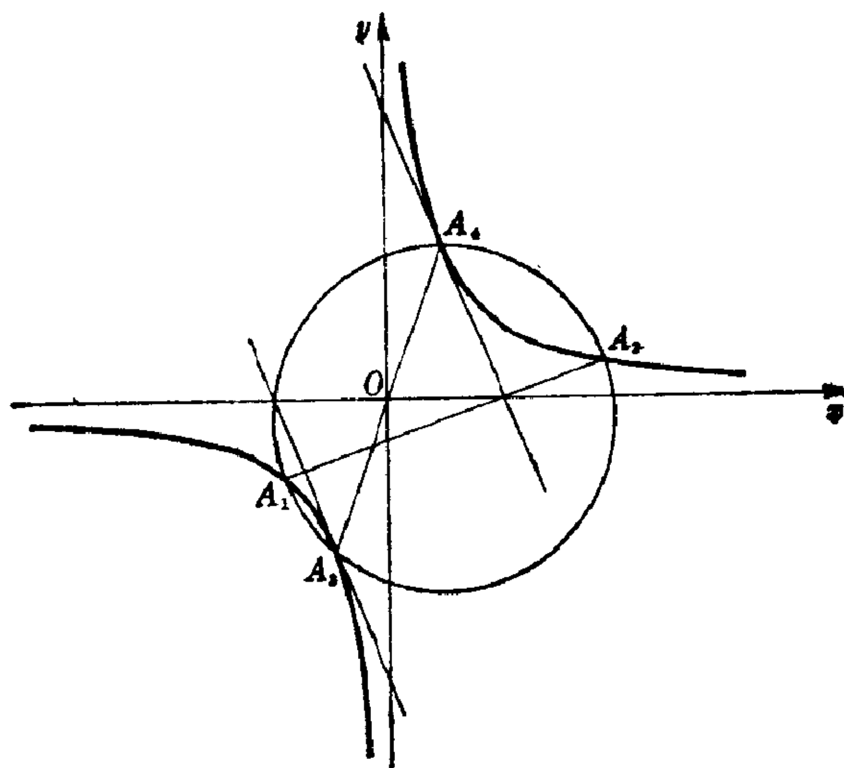


图 一

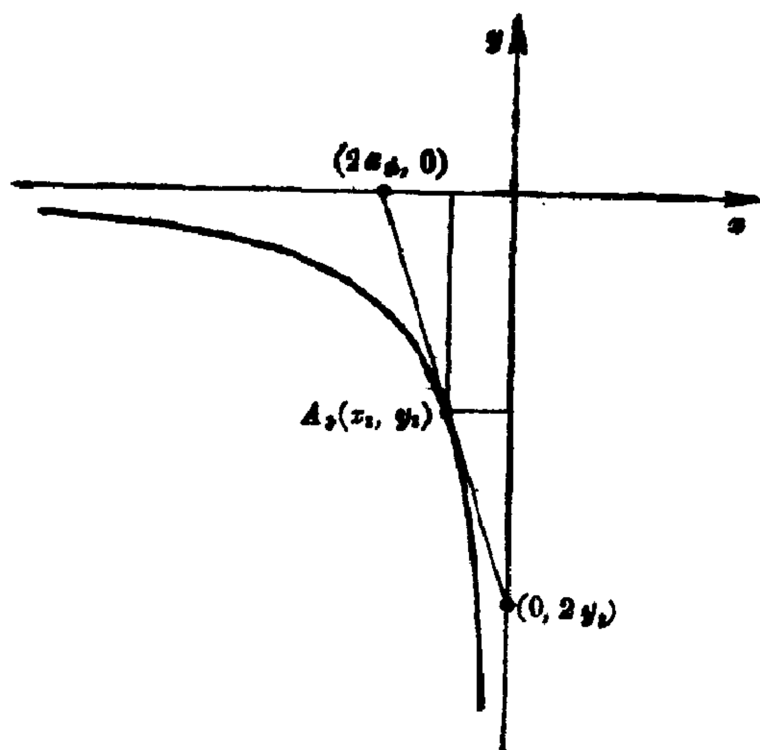


图 二

所以欲证过A_3点的双曲线的切线与圆的直径A_1A_2垂直，只要证明

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot\left(-\frac{y_3}{x_3}\right)=-1.$$

此即 $\frac{(y_2-y_1)y_3}{(x_2-x_1)x_3}=1,$

亦即 $\frac{\left(\frac{a^2}{x_2}-\frac{a^2}{x_1}\right)\frac{a^2}{x_3}}{(x_2-x_1)x_3}=1,$

也即 $x_1x_2x_3^2=-a^4.$

此即(3)式.所以过A_3点的双曲线的切线与圆的直径A_1A_2垂直. 同理可知过A_4点的双曲线的切线亦与原圆直径A_1A_2垂直本题(ii)得证。

第二十二届国际数学竞赛题解

第一试

①**解** 设$BC=a$，$CA=b$，$AB=c$，$PD=l_a$，$PE=l_b$，$PF=l_c$，这样

$$\frac{BC}{PD}+\frac{CA}{PE}+\frac{AB}{PF}=\frac{a}{l_a}+\frac{b}{l_b}+\frac{c}{l_c}. \qquad (1)$$

再设$\triangle ABC$的面积为S，而

$$S=\frac{a+b+c}{2}$$

为半周长，现在求（1）式的最小值，而约束就是：P点在$\triangle ABC$之内，注意P点在$\triangle ABC$之内时（见图一），

$$\triangle ABC\text{的面积}=\triangle PBC\text{的面积}+\triangle PCA\text{的面积}+\triangle PAB\text{的面积},$$

亦即
$$S=\frac{1}{2}al_a+\frac{1}{2}bl_b+\frac{1}{2}cl_c,$$

亦即
$$al_a+bl_b+cl_c=2S. \qquad (2)$$

而当P点在$\triangle ABC$之外时（见图二和图三），总有

$$\triangle ABC\text{的面积}<\triangle PBC\text{的面积}+\triangle PCA\text{的面积}+\triangle PAB\text{的面积},$$

亦即
$$2S<al_a+bl_b+cl_c. \qquad (3)$$

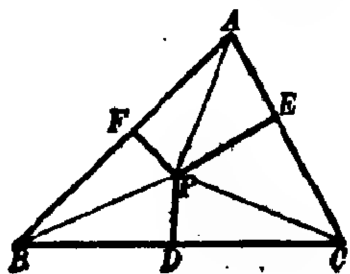
因此现在约束：P点在$\triangle ABC$之内，这个条件就可等价地(2)式来表示，因此现在的问题归结为在约束条件（2）之下，求（1）式的最小值．当然，其中a，b，c是正常数，而l_a，l_b，l_c是变数．

注意到常用的一个不等式，那就是

算术平均值≥几何平均值≥调和平均值。　　(4)

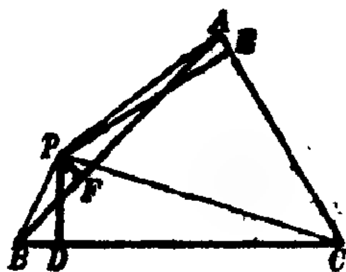
举例来说，对正数 p 和 q，我们有

$$\frac{p+q}{2} \geqslant \sqrt{pq} \geqslant \frac{1}{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}$$

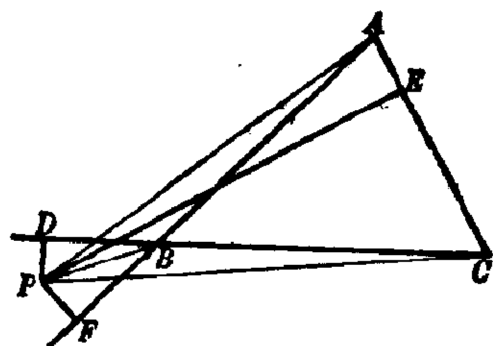


图一

注意（4）式对加权平均值仍是成立的，即我们现在要证明



图二



图三

$$\frac{al_a+bl_b+cl_c}{a+b+c} \geqslant \frac{a+b+c}{\frac{a}{l_a}+\frac{b}{l_b}+\frac{c}{l_c}}, \qquad (5)$$

而且（5）式只有在　　$l_a = l_b = l_c$　　(6)

时成为等式，这是因为（5）式就等价于

$$(al_a+bl_b+cl_c)\left(\frac{a}{l_a}+\frac{b}{l_b}+\frac{c}{l_c}\right) \geqslant (a+b+c)^2,$$

亦即

$$ab\left(\frac{l_a}{l_b}+\frac{l_b}{l_a}\right)+bc\left(\frac{l_b}{l_c}+\frac{l_c}{l_b}\right)+ca\left(\frac{l_c}{l_a}+\frac{l_a}{l_c}\right)$$

$$\geqslant 2ab+2bc+2ca \qquad (7)$$

但注意对正数 p 和 q，

$$\frac{p}{q}+\frac{q}{p} \geqslant 2, \qquad (8)$$

而且（8）式只有在　　$p=q$

时成为等式，利用(8)式，我们就可得到

$$\frac{l_a}{l_b}+\frac{l_b}{l_a}\geqslant 2，\ \frac{l_b}{l_c}+\frac{l_c}{l_b}\geqslant 2，\ \frac{l_c}{l_a}+\frac{l_a}{l_c}\geqslant 2， \qquad (9)$$

而且(9)式中的三个不等式只有在

$$l_a=l_b=l_c \qquad (6)$$

时全部成为等式。又因为

$$ab>0，\ bc>0，\ ca>0，$$

因此据(9)式就得到了(7)，而且可知只有在(6)式成立时，(7)式才成为等式，这样(5)式就证得了。今据(5)式便得

$$\frac{a}{l_a}+\frac{b}{l_b}+\frac{c}{l_c}\geqslant\frac{(a+b+c)^2}{al_a+bl_b+cl_c}=\frac{(2R)^2}{2S}$$

$$=\frac{2S^2}{\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}}$$

$$=\frac{2R^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(S-a)(S-b)(S-c)}}$$

因此我们可知：

(1)式的最小值是

$$\frac{2S^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(S-a)(S-b)(S-c)}}，$$

而且只有P点是$\triangle ABC$的内切圆心时（此时$l_a=l_b=l_c=r=\triangle ABC$的内切圆半径），(1)式才达到比最小值。

②**解** 记集合 $A=\{1，2，3，\cdots，n\}$.

而它的所有有r个元素（其中 $1\leqslant r\leqslant n$）的子集合所构成的集合类记为A_r。而再用

$$A_{r,j}, \qquad 1 \leqslant j \leqslant n-r+1,$$

表示A的所有有r个元素，而且其最小元素为j的这样一些A的子集合所构成的集合类，显而易见

$$A_r = A_{r,1} \cup A_{r,2} \cup \cdots \cup A_{r,n-r+1} \qquad (1)$$

此外，对任意两个$A_{r,j}$和$A_{r,j'}$，$j \neq j'$，$A_{r,j} \cap A_{r,j'}$ = 空集合。如果我们对一个集合的类B，用$|B|$表示B中集合的个数，那末我们要证明

$$|A_{r,j}| = \binom{n-j}{r-1}. \qquad (2)$$

这是因为对$A_{r,j}$中的每一个集合B，其最小元素为j，因此其余$(r-1)$个元素必定是落在 $j+1$，$j+2$，…，$n-1$，n这$(n-j)$个数中，因此所有的最小元素为j的r个元素的A的子集合，共有$\binom{n-j}{r-1}$个，亦即(2)式成立。有了(1)式和(2)式，那么如果记μ为集合类A_r中所有集合的最小元素的平均数，那么就有

$$\mu = \frac{1 \times \binom{n-1}{r-1} + 2 \times \binom{n-2}{r-1} + \cdots + (n-r) \times \binom{r}{r-1}}{\binom{n}{r}}$$

$$+ \frac{(n-r+1)\binom{r-1}{r-1}}{\binom{n}{r}}. \qquad (3)$$

为了计算(3)式的分子，我们需要建立一个引理：

引理 对自然数a，b，$b \geqslant a$，我们有

$$\binom{a}{a} + \binom{a+1}{a} + \binom{a+2}{a} + \cdots + \binom{b}{a} = \binom{b+1}{a+1}. \qquad (4)$$

证明

$$\binom{a}{a}+\binom{a+1}{a}+\binom{a+2}{a}+\cdots+\binom{b}{a}$$

$$=\binom{a+1}{a+1}+\binom{a+1}{a}+\binom{a+2}{a}+\cdots+\binom{b}{a}$$

$$=\binom{a+2}{a+1}+\binom{a+2}{a}+\cdots+\binom{b}{a}$$

$$=\binom{a+3}{a+1}+\binom{a+3}{a}+\cdots+\binom{b}{a}$$

$$=\binom{a+4}{a+1}+\cdots+\binom{b}{a}$$

……

$$=\binom{b+1}{a+1}$$

现在有 $1\times\binom{n-1}{r-1}+2\times\binom{n-2}{r-1}+\cdots+(n-r)\times\binom{r}{r-1}$

$$+(n-r+1)\times\binom{r-1}{r-1}$$

$$=\left[\binom{n-1}{r-1}+\binom{n-2}{r-1}+\cdots+\binom{r}{r-1}+\binom{r-1}{r-1}\right]$$

$$+\left[\binom{n-2}{r-1}+\cdots+\binom{r}{r-1}+\binom{r-1}{r-1}\right]$$

…………

$$+\left[\binom{r}{r-1}+\binom{r-1}{r-1}\right]$$

$$+\binom{r-1}{r-1}$$

$$=\binom{n}{r}+\binom{n-1}{r}+\cdots+\binom{r+1}{r}+\binom{r}{r}=\binom{n+1}{r+1}.$$

因此 $\mu=\dfrac{\binom{n+1}{r+1}}{\binom{n}{r}}=\dfrac{\dfrac{(n+1)!}{(r+1)!\ (n-r)!}}{\dfrac{n!}{r!\ (n-r)!}}=\dfrac{n+1}{r+1}$。　　(5)

③**解**　我们记

$$S=\left\{(m,\ n)\ \middle|\ m,\ n\text{是整数，而且}(m^2-mn-n^2)^2=1\right\}.$$

这样我们有：

(i) 若$(m,\ n)\in S$，则 $(n,\ m-n)\in S$。

这是因为　$1=(m^2-mn-n^2)^2=(n^2+mn-m^2)^2$

$$=[n^2-n(m-n)-(m-n)^2]^2.$$

(ii) 若 $(m,\ n)\in S$，但m，n为自然数而且$n\neq1$，那么$m>n$

这是因为由$(m^2-mn-n^2)^2=1$，可得$m^2-mn-n^2=\pm1$。若$m<n$，则$m^2<n^2$，当然$m^2\leqslant n^2-1$，亦即$m^2-n^2\leqslant-1$。此外因m，n是自然数，所以$mn\geqslant1$，因此$-mn\leqslant-1$。这样

$$\pm1=m^2-mn-n^2=m^2-n^2-mn\leqslant-1-1=-2,$$

这就产生了矛盾，同样若$m=n$，则$n^4=1$，亦即$n=1$，而这与假设矛盾，因此只有$m>n$。

(iii) 若 $(m,\ 1)\in S$，m为自然数，那么$m=1$或2。

这是因为m要满足

$$m^2-m-1=\pm1,$$

亦即　$m^2-m=0$　或　$m^2-m-2=0$。

因此有$m=2$或$m=1$。

现在如果 $(m,\ n)\in S$，m，n是自然数，$n\neq1$，那

么由（i）知（n，$m-n$）$\in S$；由(ii)知$m>n$，亦即$m-n$是自然数。所以现在（n，$m-n$）$\in S$，m，$m-n$是自然数。再若$m-n\neq 1$，那么又可重复上面的过程，直到得到（m'，1）$\in S$，m'是自然数，但由(iii)知，此时 $m'=2$或1。若$m'=2$，亦即（2，1）$\in S$,那么再进行一次上面的过程，便得（1，1）$\in S$。因此从（m，n）$\in S$，m，n是自然数这两个条件开始，总可经过有限次上面的过程，最终得到（1，1）$\in S$，因此我们可知：若（m，n）$\in S$，m，n是自然数，那么n，m必定是下列数列中相邻的一对（其中n是较小者，m是较大者）：

1，1，2，3，5，8，13，21，34，55，89，144，233，377，610，987，1597，2584…………　　(1)

此数列的特点是：每一项是前两项之和；初始两项为1，1。此数列称之为斐波那契(Fibonacci)数列。

现在为了求m，n满足

$$m,\quad n\in\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ 1981\},$$

$$(m^2-mn-n^2)^2=1$$

这两个条件下 m^2+n^2 的最大值。据上面叙述的理由，可知只要找出斐波那契数列中小于1981而又最靠近1981的那一项就行了，而由(1)式可知，这一项就是1597，所以m^2+n^2的最大值就是

$$1597^2+987^2=3524578.$$

第二试

④**解**　我们按照习惯，用方括号表示最小公倍数，用圆括号表示最大公约数，首先要建立一个初等数论中的引理，那就

是

引理 如果 $[b_1, b_2\cdots, b_s]=b$,

那么
$$P^\alpha \mid b$$
的充分必要条件是存在某个i, $1\leqslant i\leqslant S$使
$$P^\alpha \mid b_i.$$
其中P是素数, α是自然数.

证明 我们将b_1, b_2, …, b_s作素因子分解,

即
$$b_1=P_1^{\alpha_1^1}P_2^{\alpha_2^1}\cdots P_t^{\alpha_t^1},$$
$$b_2=P_1^{\alpha_1^2}P_2^{\alpha_2^2}\cdots P_t^{\alpha_t^2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$b_s=P_1^{\alpha_1^R}P_2^{\alpha_2^R}\cdots P_t^{\alpha_t^R},$$
其中P_1, P_2, P_t是互异的素数, α_1^1, α_1^2, …, α_1^s不全为零, ……, α_t^1, $\alpha_t^2\cdots$, α_t^s不全为零。令
$$\alpha_1=\max_i \alpha_1^i,\quad \alpha_2=\max_i \alpha_2^i,\quad \cdots\cdots,\quad \alpha_t=\max_i \alpha_t^i.$$

则显然 $[b_1, b_2\cdots, b_s]=b=P_1^{\alpha_1}P_2^{\alpha_2}\cdots P_t^{\alpha_t}$.

因此若
$$P^\alpha \mid b,$$
那么一定存在某一j, $1\leqslant j\leqslant t$, 使
$$P=P_j,\qquad \alpha\leqslant\alpha_j.$$
再设α_j^1, α_j^2, $\cdots\alpha_j^R$中最大者为α_j^i, 亦即
$$\alpha_j=\max_i \alpha_j^i=\alpha_j^i,$$

这样就有
$$\alpha\leqslant\alpha_j^i,$$
因此
$$P^\alpha \mid b_i.$$
至于引理的充分性部份是显然的。

对固定的n，我们对所有$k \geqslant n$的自然数，定义

$$M_{k-1}=[k-1,\ k-2,\ k-3,\ \cdots,\ k-(n-1)],$$

即M_{k-1}是相连的$(n-1)$个数$k-1$，$k-2$，…，$k-(n-1)$的最小公倍数。

我们要证明：如果存在$k \geqslant n$，使

$$k \mid M_{k-1}, \qquad (1)$$

那么一定有 $$k \mid M_{n-1}. \qquad (2)$$

反之亦然。

这是因为对任何$k \geqslant n$，我们有

$$(k,\ M_{k-1})=(k,\ M_{n-1}). \qquad (3)$$

我们先来证明(3)式，若对素数P，

$$P^{\alpha} \mid (k,\ M_{k-1}),$$

则一定有 $P^{\alpha} \mid k$ 及 $P^{\alpha} \mid M_{k-1}=[k-1,\ k-2,\ \cdots,\ k-(n-1)]$.

据引理可知，一定存在某一i，$1 \leqslant i \leqslant n-1$，使

$$P^{\alpha} \mid k-i.$$

这样就有 $P^{\alpha} \mid i$，其中$1 \leqslant i \leqslant n-1$.

故一定有 $P^{\alpha} \mid M_{n-1}$.

因此 $p^{\alpha} \mid (k,\ M_{n-1})$.

反之亦可证明若$p^{\alpha} \mid (k,\ M_{n-1})$，一定有$p^{\alpha} \mid (k,\ M_{k-1})$.

这样就证明了(3)式。

现在因为 $k \mid M_{k-1}$，所以

$$k=(k,\ M_{k-1})=(k,\ M_{n-1}),$$

因此一定有$k \mid M_{n-1}$，亦就是(2)式得证.反之亦可从(2)式来证得(1)式。

现在我们对各个具体n来观察(2)式，从而研究是否存在k，使得

$$n\leqslant k,\qquad k\mid M_{n-1}. \tag{4}$$

当$n=3$时，$M_2=1\times 2=2$．若$k\mid M_2$，那么一定有$k=1$或2，但要求$k\geqslant 3$．所以矛盾，因此可知$n=3$时本题无解．

当$n=4$时，$M_3=[3,2,1]=6$．要求$k\geqslant 4$以及$k\mid 6$，那么就只有$k=6$，此时$k-1$，$k-2$，$k-3$分别为$5,4,3$；而$[5,4,3]=5\times 4\times 3=60$，而且$6\mid 60$．所以可知$n=4$时，存在唯一的解：$k=6$．

当$n\geqslant 5$时，因为

$$1=(n-1,\ n-2),$$

这是因为若$(n-1,\ n-2)=S\geqslant 2$，那么$s\mid n-1$，$s\mid n-2$，因此$s\mid (n-1)-(n-2)=1$，但$s\geqslant 2$．故矛盾．因此

$$(n-1)(n-2)\mid M_{n-1},$$

再因为$(n-1)$，$(n-2)$中必定有一为偶数，所以$\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$是整数，而且

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}\,\Big|\,M_{n-1},$$

因对$n\geqslant 5$
$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}>n, \tag{5}$$

这是因为和（5）式等价的不等式是

$$n^2-5n+2>0,$$

亦即
$$\left(n-\frac{5}{2}\right)^2>\left(\frac{\sqrt{17}}{2}\right)^2.$$

因为
$$5-\frac{5}{2}=\frac{5}{2}>\frac{\sqrt{17}}{2}.$$

所以（5）式对$n\geqslant 5$是满足的，这样我们对$n\geqslant 5$就至少找到了两个k：

$$k_1=(n-1)(n-2),\qquad k_2=\frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

它们都满足（4）式。因此可知：$n\geqslant 5$ 时，存在$\geqslant 2$ 个解。如$n=8$，$k_1=42$，$k_2=21$就是两个解。

⑤**解** 在正式解本题之前，我们要介绍一些关于位似的概念与定理[注]，运用这些概念与定理，就可以非常简捷地解得本题。

若固定一点S及一个数k($k\neq 0$)，将任一点M与点S联直线，在此直线上沿SM的方向或相反的方向截取一线段SM'，使$\frac{SM'}{SM}=|k|$。如果$k>0$的话，那么SM与SM'同向；如果$k<0$的话，那么SM与SM'反向，这样所得的点M'称为点M的位似点（见图一），点S称为位似中心，k称为位似比。如果$k>0$，那么称为正位似；如果$k<0$，那么称为反位似。

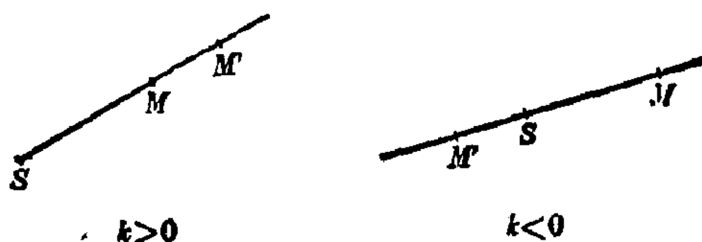


图　一

如果有一图形F，按其各点得到相应的位似点，这些位似点所构成的图形称为原图形F的位似形。我们要指出：

定理一 如果对于某位似中心，A'是A的位似点，B'是B的位似点。那么$A'B'\parallel AB$。至于$A'B'$与AB是同向或反向视

〔注〕 读者如想了解更多一些关于位似方面知识，可参阅J.阿达玛著，朱德祥译，《初等几何教程》（上册，平面几何），1964，上海科学技术出版社，这一书的第三篇的第五章"位似与相似"。

位似是正或反而定。

证明 见图二。在正位似时，因

$$\frac{SA}{SA'}=\frac{SB}{SB'}.$$

所以$AB\parallel A'B'$，反位似亦类似。

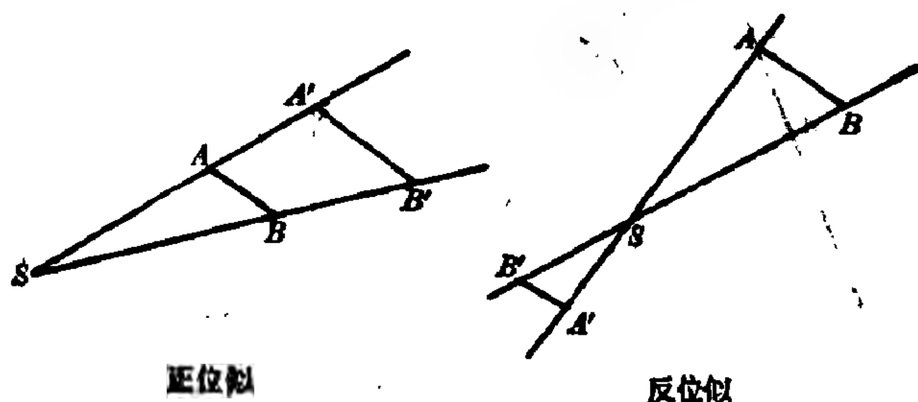


图　二

定理二 如果对于某位似中心，A'是A的位似点，B'是B的位似点。另有一对点C与C'，若$AC\parallel A'C'$，$BC\parallel B'C'$，那么C的位似点一定是C'。

证明 见图三。在正位似时，连SC，过A'作平行AC的直线，与直线SC相交于C''，过B'作平行于BC的直线，与直线BC相交于C'''。因为

$$\frac{SC''}{SC}=\frac{SA'}{SA},\qquad \frac{SC'''}{SC}=\frac{SB'}{SB},$$

但
$$\frac{SA'}{SA}=\frac{SB'}{SB},$$

所以
$$\frac{SC''}{SC}=\frac{SC'''}{SC},$$

亦即
$$SC''=SC'''.$$

可见C''即为C'''，亦即它们都为C'，因此有

$$\frac{SC'}{SC}=\frac{SC''}{SC}=\frac{SA'}{SA}=\frac{SB'}{SB},$$

所以C'是C的位似点，在反位似时，证法相仿。

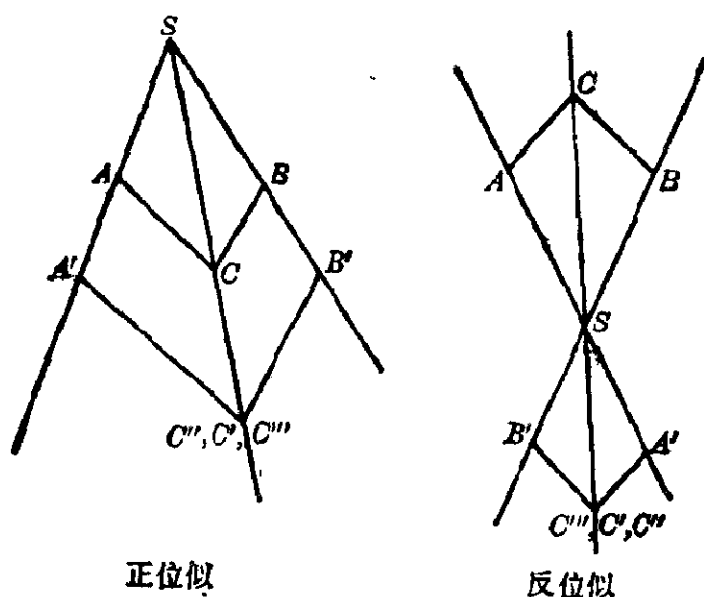


图　三

定理三　如果两个三角形ABC与$A'B'C'$，三边相应平行，那么此两三角形一定是位似或者全等。

证明　连接AA'，BB'，CC'．如果这三条直线中有两条相交，设AA'与BB'相交于S．(见图四)，那么由定理二知，因

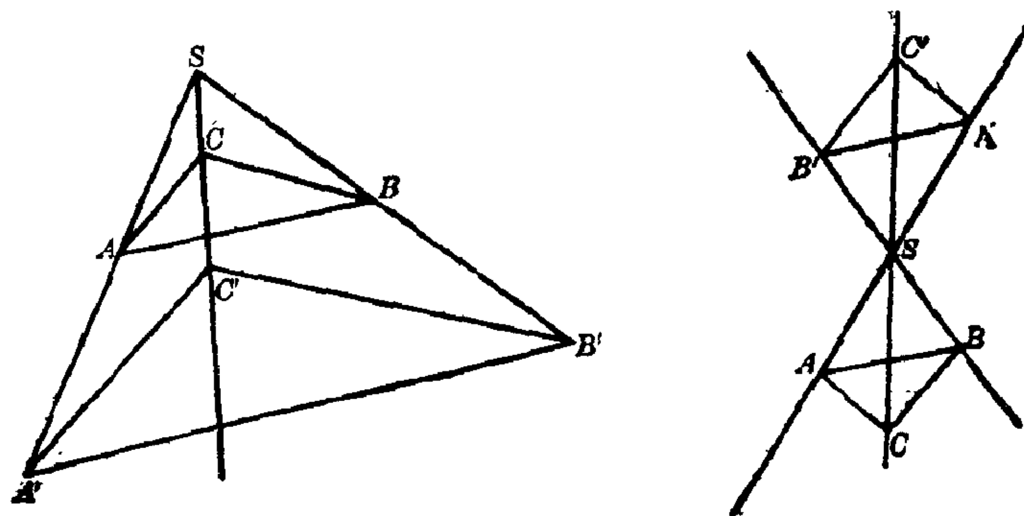
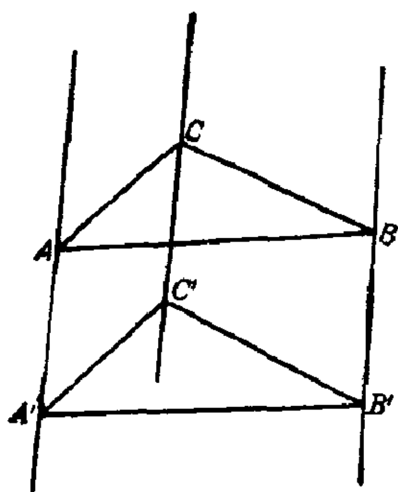


图　四

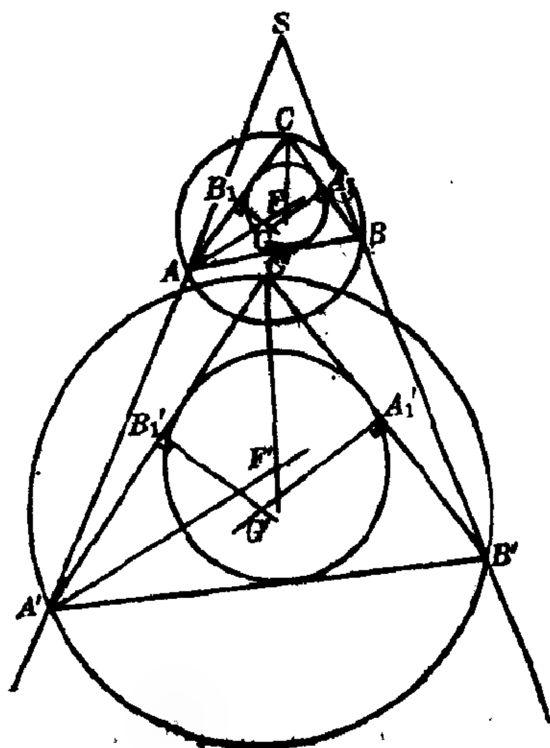
为$CA \parallel C'A'$，$CB \parallel C'B'$，所以C'是C的位似点，因此$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$位似。在AA'，BB'，CC'都是平行时(见图五)，因为$AC \parallel A'C'$，$CB \parallel C'B'$，所以一定有$A'C' = AC$，$B'C' = BC$。因而有$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$全等。

定理四 若$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$位似。$\triangle ABC$的内心和外心分别为F与G，$\triangle A'B'C'$的内心和外心分别为F'和G'，那么F'和G'分别是F和G的位似点，而且$F'G' \parallel FG$。

证明 见图六。设位似中心为S，因为$AC \parallel A'C'$，$CB \parallel C'B'$，$AB \parallel A'B'$，所以$\angle C$的内角平分线$CF \parallel \angle C'$的内角平分线$C'F'$，同理$AF \parallel A'F'$。由定理二可知，F'是F的位似点。再因为AC边的垂直平分线$B_1G \parallel A'C'$边的垂直平分线$B_1'G'$，同理$A_1G \parallel A_1'G'$。而因为A_1，B_1分别是BC，AC的中点，A_1'，B_1'分别是$B'C'$，$A'C'$的中点，所以A_1'，B_1'分别是A_1，B_1的位似点。因此由定理二可知，G'是G的位似点。



图五



图六

再由定理一可知，$G'F' \parallel GF$。

现在我们来证明本题，设此三角形为$\triangle ABC$．三圆的圆心分别为D，E，F（图略，读者自画），三圆的公共交点为0。因为这三圆的半径均为r，所以

$$OD=OE=OF,$$

因此O点是$\triangle DEF$的外心。

再连接BE，AD。它们的延长线相交于P点（图略，读者自画）．因为E点与D点到边AB的距离均为r，所以$DE \parallel AB$，同理$EF \parallel BC$，$DF \parallel AC$。因为PB是$\angle B$的角平分线，PA是$\angle A$的角平分线，所以PC亦是$\angle DFE$的角平分线，PA亦是$\angle EDF$的角平分线。这就是说P点既是$\triangle ABC$的内心，亦是$\triangle DEF$的内心。

再设$\triangle ABC$的外心为Q.

注意$\triangle ABC$与$\triangle DEF$是三边相互平行的，所以由定理三可知。$\triangle ABC$一定与$\triangle DEF$位似。（某实位似中心就是P!）因此由定理四可知。

$$PQ \parallel PO.$$

但因PQ与PO中都有P点，所以一定是

P，Q，O三点共线.

⑥**解**　函数$f(x,y)$满足

$$\begin{cases} f(0,y)=y+1, & (1)\\ f(x+1,0)=f(x,1), & (2)\\ f(x+1,y+1)=f[x,f(x+1,y)]. & (3)\end{cases}$$

我们的思路是逐步找出$f(1,y+1)$，$f(2,y+1)$，$f(3,y+1)$，$f(4,y+1)$的显表达式。最后将$y=1980$．代入$f(4,y+1)$就得到了$f(4,1981)$的值。注意

$$f(1,y+1)=f(0+1,y+1)=f[0,f(1,y)]$$

$$=f(1,y)+1,$$

$$f(1,0)=f(0+1,0)=f(0,1)=1+1=2.$$

因此 $$\begin{cases} f(1,y+1)-f(1,y)=1, & (4) \\ f(1,0)=2. & (5) \end{cases}$$

从(4)式和(5)式我们就可求得$f(1,y+1)$的表达式,这是因为

$$f(1,y+1)=f(1,y)+1=f(1,y-1)+2$$
$$=\cdots=f(1,0)+y+1=2+y+1=y+3,$$

因此 $$f(1,y+1)=y+3. \quad (6)$$

再因为 $$f(2,y+1)=f(1+1,y+1)=f[1,f(2,y)]$$
$$=f(2,y)+2,$$

$$f(2,0)=f(1+1,0)=f(1,1)=3,$$

因此 $$\begin{cases} f(2,y+1)-f(2,y)=2, & (7) \\ f(2,0)=3. & (8) \end{cases}$$

从(7)式和(8)式我们就可求得$f(2,y+1)$ 的表达式，这是因为

$$f(2,y+1)=f(2,y)+2=f(2,y-1)+2\times2=\cdots$$
$$=f(2,0)+2\times(y+1)$$
$$=3+2y+2=2y+5,$$

因此 $$f(2,y+1)=2y+5. \quad (9)$$

再因为 $$f(3,y+1)=f(2+1,y+1)=f[2,f(3,y)]$$
$$=2f(3,y)+3,$$

$$f(3,0)=f(2+1,0)=f(2,1)=5,$$

因此 $$\begin{cases} f(3,y+1)=2f(3,y)+3, & (10) \\ f(3,0)=5. & (11) \end{cases}$$

这样从(9)式和(10)式便可求得$f(3,y+1)$这是因为

$$f(3,y+1)=2f(3,y)+3$$
$$=2[2f(3,y-1)+3]+3$$
$$=2^2f(3,y-1)+3(1+2)$$

$$= 2^3 f(3, y-2) + 3(1+2+2^2)$$

$$\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots$$

$$= 2^{y+1} f(3,0) + 3(1+2+2^2+\cdots 2^y)$$

$$= 5\cdot 2^{y+1} + 3(2^{y+1}-1) = 8\cdot 2^{y+1} - 3$$

$$= 2^{y+4} - 3,$$

因此 $\quad f(3, y+1) = 2^{y+4} - 3。\qquad (12)$

现在 $\quad f(4, y+1) = f(3+1, y+1) = f[3, f(4, y)]$

$$= 8\cdot 2^{f(4,y)} - 3,$$

$$f(4,0) = f(3+1,0) = f(3,1) = 8\cdot 2 - 3 = 13,$$

这样便得 $\begin{cases} f(4, y+1) = 8\cdot 2^{f(4,y)} - 3, & (13) \\ f(4,0) = 13。 & (14) \end{cases}$

从(13)，(14)式，便可求得$f(4, y+1)$的表达式，那是因为

$$f(4, y+1) = 8\cdot 2^{f(4,y)} - 3 = 8\cdot 2^{8\cdot 2^{f(4,y-1)} - 3} - 3$$

$$= 2^{8\cdot 2^{f(4,y-1)}} - 3$$

$$= 2^{8\cdot 2^{8\cdot 2^{f(4,y-2)} - 3}} - 3$$

$$= 2^{2^{8\cdot 2^{f(4,y-2)}}} - 3 = \cdots\cdots$$

$$= 2^{2^{\cdot^{\cdot^{2^{8\cdot 2^{f(4,0)}}}}}}\Big\}(y个2) - 3$$

$$= 2^{2^{\cdot^{\cdot^{2^{8\cdot 2^{13}}}}}} - 3$$

$$= 2^{2^{\cdot^{\cdot^{2^{2^{16}}}}}} - 3$$

$$= 2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}\Big\}(y+4)个2 - 3,$$

因此　$f(4,y+1)=2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}\Big\}(y+4)\text{个}2-3$　　(15)

所以　$f(4,1981)=f(4,1980+1)=2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}\Big\}1984\text{个}2-3$。

美国1981年(第十届)数学竞赛题解

①**解法一**　因为n不能被3除尽，所以

$$(3,n)=1,$$

即n与3互素。因此存在非负整数p与q，使

$$3p=qn+1。$$

这样　$$\frac{p}{n}=\frac{q}{3}+\frac{1}{3n},$$

亦即　$$p\frac{180°}{n}-q60°=\frac{180°}{3n}。\qquad (1)$$

因为p，q是非负整数，从(1)式中就得到了$\frac{180°}{3n}$的表达式，它表示$\frac{180°}{3n}$可以通过$\frac{180°}{n}$与60°的倍数，再求差来得到.而因为$\frac{180°}{n}$是已经给出的角，而60°可用直尺、圆规作出，求一角的倍数角以及求两角之差都可用圆规、直尺来作，所以现在可用圆规直尺来作出$\frac{180°}{3n}$，即将原已知角$\frac{180°}{n}$三等分。

举例来说，若$n=7$，那么

$$3\times5=2\times7+1,$$

即　$p=5$，$q=2$。

所以 $$5\times\frac{180^\circ}{7}-2\times 60^\circ=\frac{180^\circ}{3\times 7}.$$

解法二 因为n不能被3除尽，所以

$n=3k\pm 1$，其中k为自然数。

(i) 当$n=3k+1$时，我们有

$$\frac{1}{3}-\frac{k}{3k+1}=\frac{1}{3(3k+1)},$$

因此 $$60^\circ-\frac{180^\circ}{3k+1}k=\frac{180^\circ}{3(3k+1)}. \tag{2}$$

(ii) 当$n=3k-1$时，我们有

$$\frac{k}{3k-1}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3(3k-1)},$$

因此 $$\frac{180^\circ}{3k-1}k-60^\circ=\frac{180^\circ}{3(3k-1)}. \tag{3}$$

因此，无论（2）式或（3）式，我们总可以通过圆规、直尺将$\frac{180^\circ}{n}$三等分。

②**解** 这个县内至多有4个区。这个结论的证明如下：

我们用①，②，③，……来表示各个区，此外再用A、B、C分别表示用汽车、火车、飞机来进行联系。为叙述方便起见，如果①与②之间是用A进行联系的，那么就说（①，②）是A，或者是（②，①）是A。

此外，在本题的所有图示中我们用粗实线、细实线、虚线分别表示A、B、C。据题意，我们可以得到三个规则：

规则甲 没有一个区与其它所有的区分别进行联系时，使A、B、C都是用上的。

规则乙 没有三个区，它们两两进行联系时，用的是同一

种A或B或C。

规则丙 就整个县的联系来看，A、B、C中的每一种至少要被用上一次。

解法一 1）我们先证明：在遵守规则甲和规则乙而县内只有四个区的情况之下，这四个区之间的联系情况必定是下列三种类型之一〔注〕(见图一)：

类型 α

用A联系的：(①,②)，(②,③)，(③,④)，(④，①)。

用B联系的：(①,③)，(②,④)。

类型 β

用A联系的：(①,②)，(②,③)，(③,④)，(④，①)。

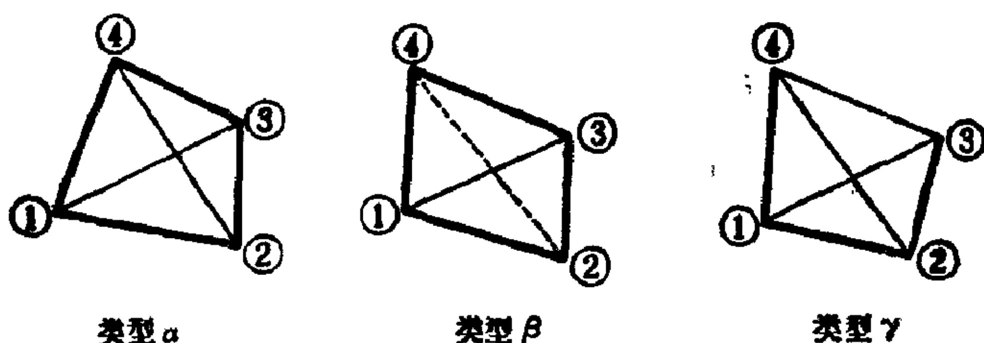
用B联系的：(①，③)。

用C联系的：(②，④)。

类型 γ

用A联系的：(①，②)，(②，③)，(①，④)。

用B联系的：(①，③)，(②，④)，(③，④)。



粗实线表示A，细实线表示B，虚线表示C。

图 一

〔注〕 这是指这四个区的编号进行一次置换以后和A、B、C之间进行一次置换以后，总可以与类型α、β、γ之一相合。

现在证明以上的结论.

因为只有 4 个区，因此两两之间的联系共有$\binom{4}{2}=6$对.在这 6 对之中，不可能有 5 对或 5 对以上是用同一种方式联系的. 这是因为如果是的话，一定有三个区，它们之间两两进行联系时用的是同一种方式，这就与规则乙相矛盾. 所以如果在这 6 对之中，至多只能有 4 对是用同一种方式联系的. 现设确是有 4 对是用同一种方式联系的. 设这种方式是A，再设(①,②)是其中之一. 再将规则乙分别应用于①，②，④这三个区和①，②，③这三个区，

那末可知：(①，④)与(②，④)中至多只能有一是A，　(1)

(①，③)与(②，③)中至多只能有一是A.　(2)

因为现在除(①,②)是A外，还要有三对是A，这样由(1)和(2)可知：(③，④)必定是A，而且

(①，④)与(②，④)中有而且只有一是A，　(3)

(①，③)与(②，③)中有而且只有一是A.　(4)

但因　(②，④)与(②，③)不能同时是A，　(5)

(①，③)与(①，④)不能同时是A，　(6)

因此　如果(①，④)是A，那末(②，③)是A，　(7)

如果(②，④)是A，那末(①，③)是A.　(8)

因为在(8)的情况下，将①与②的编号对换一下，就是(7)的情况，所以我们只要讨论(7)的情况就够了. 在情况(7)之下，如果(①，③)与(②，④)是同一种方式联系的，那末可设此方式是B，这样就是类型α(见图一)；如果(①，③)与(②，④)是不同的，那末可设前者是B，后者是C，这样就是类型β(见图一).

现在设这4个区的 6 对联系中有而且只有3对是相同的. 那

末可设此联系方式是A，而且（①，②）是其中的一对。由前面讨论的(3)与(4)可知，另外两对用方式A联系的只可能是下列情况之一：

（①，④）与（②，③）都是A；　　(9)

（①，④）与（①，③）都是A；　　(10)

（②，④）与（①，③）都是A；　　(11)

（②，④）与（②，③）都是A；　　(12)

（③，④）与（①，④）都是A；　　(13)

（③，④）与（①，③）都是A；　　(14)

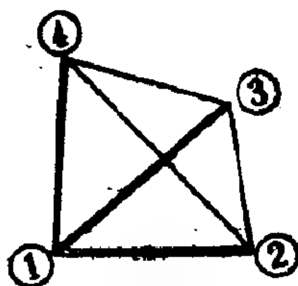
（③，④）与（②，④）都是A；　　(15)

（③，④）与（②，③）都是A。　　(16)

如果发生情况(10)，那末

（①，②），（①，③），（①，④）都是A，　　(17)

（见图二）不失一般性，可设（②，④）是B，那末将规则甲分别应用于②和④，那末，可知（②，③）和（④，③）都是B，这是因为（②，③）不可能是C，再因为四个区的六对联系中只允许有三对是A，〔见(17)〕，所以（②，③）不能是A，因此（②，③）只能是B；对（③，④）亦是如此。这样对②，③，④三个区而言就与规则乙相矛盾。因此可知(10)是不会发生的。



粗实线表示A，细实线表示B。

图　二

同理可证，(12)亦是不会发生的。而对(9)的情况，如果再设(②，④)是 B，因为此时在四个区的六对联系中

有而且只有(①,②)，(②,③)，(①,④)是A. (18)

因此应用规则甲于④，那末可知(④，③)是 B，再应用规则甲于③，便知(①，③)是B. 因此在情况(9)之下，就得到类型γ(见图一)，而在(11)，(13)，(14)，(15)，(16)这五种情况下，只要将各区的编号作适当的置换后，即可与情况⑨相合，从而与类型γ相合。图三中指出了各相应的置换。

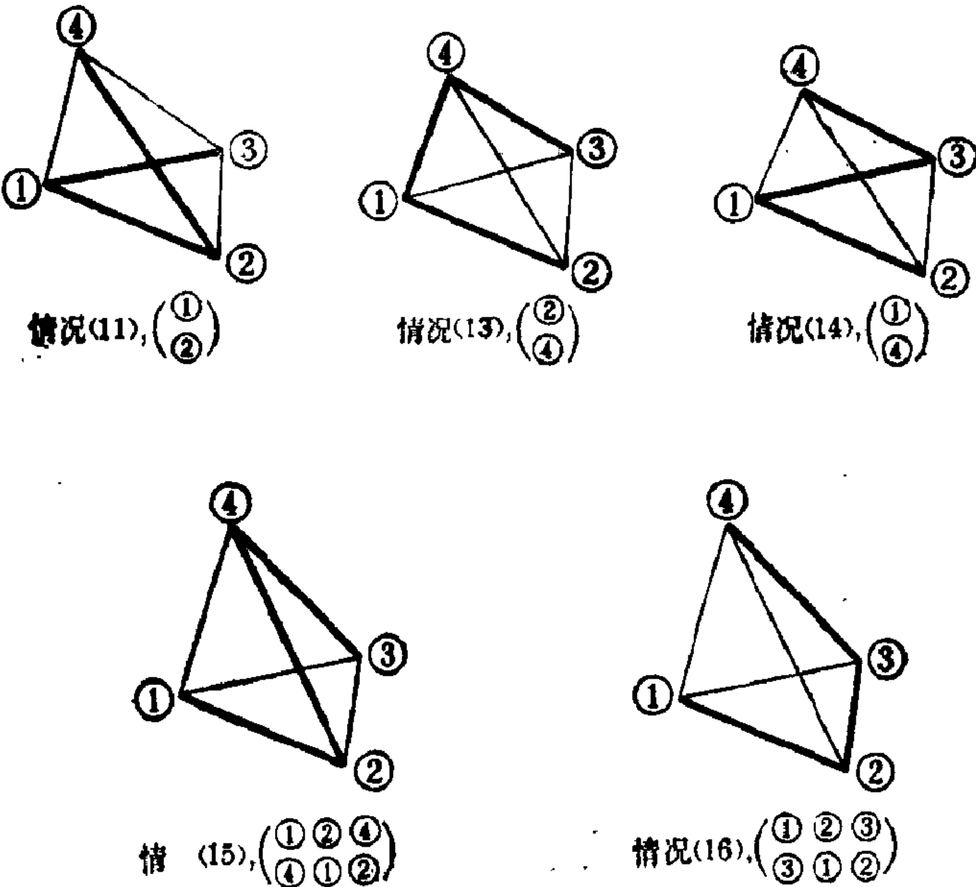


图 三

余下的，只要证明这四个区的六对联系中A，B，C各占两对的情况是不可能发生的。这是因为将规则甲应用于①，便知(①，②)，(①，③)，(①，④)中一定有两对是用相同的方式联系的。不失一般性，可设(①,②)与(①,③)都是A,而(②,③)

是B、这样再将规则甲分别应用于②及③，可知（②，④）是B，（③，④）亦是B。这样②，③，④这三个区之间就与规则乙相矛盾。

这样就证明得到了1）中开始时提出的结论。注意类型α与类型γ是不满足规则丙的。因此附带可知，当只有四个区时，只有类型β是合题意的。

2）现在证明有五个或五个以上的区是不可能的。首先证明若是有五个或五个以上的区，那末一定可以从这些区中选出五个区，便得这五个区之间的联系方式一定A、B、C都有。（即这五个区之间的联系方式要满足规则丙。）因为如果这一点不能做到，那就意味着：这个县内的任意五个区，它们之间的联系方式至多只有两种。若是如此，那末我们先选定某三个区：①，②，③，它们之间的联系方式当然不能只是一种，但现在只能是两种，可设为A、B，如果另外有一个区ⓝ（$n\neq1$，2，3），那么n与①，②，③之间的联系方式当然只能是A或B。如果另外再有一个区m（$m\neq1$，2，3，n），那么因为由①，②，③，ⓜ，ⓝ这五个区之间的联系方式至多只有两种，也就是A和B，所以（ⓜ，ⓝ）一定是A或B、这就证明了这个县内任意两个区之间的联系方式一定是A或B，这就与规则丙相矛盾。所以必定可选到五个区：①，②，③，④，⑤，它们之间的联系方式是A，B，C都有的。在这五个区中，我们先看①，②，③，④这四个区，因为这四个区之间的联系方式满足规则甲和乙，所以他们之间的联系类型，由1）可知，必定是α，β，γ这三种类型之一。如果由α类型，这样在①，②，③，④之间只出现方式A和B，所以必定在（⑤，①），（⑤，②），（⑤，③），（⑤，④）中某一是C。譬如说（⑤，①）是C，那末对①而言，就不满足规则①。这就产生了矛盾。对（⑤，②）或是（⑤，③）或是（⑤，④）是C，都会产生类似的矛盾，如果①，

②，③，④之间是类型γ，类似于以上的讨论，可知也会产生矛盾．而如果①，②，③，④之间是类型β，（见图四），那末将规则甲应用于①，可知（⑤，①）不可能是C，而只能是A或B．如果（⑤，①）是A，那末将规则乙应用于①，②，⑤，便知（⑤，②）只可能是B或C，而将规则甲应用②，可知（⑤，②）不能是B，而只能是C。再将规则乙应用于②，④，⑤，便知（⑤，④）只能是A或B。而将规则甲应用于④，便知（⑤，④）不能是B，而只能是A。这样（⑤，①），（⑤，④），（④，①）都是A，从而与规则乙相矛盾。所以（⑤，①）是A不可能。如果（⑤，①）是B，那末将规则乙应用于①，③，⑤，便知（⑤，③）不能是B，而只能是

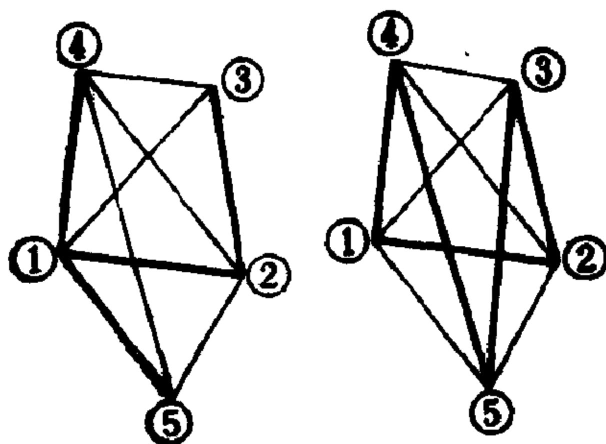
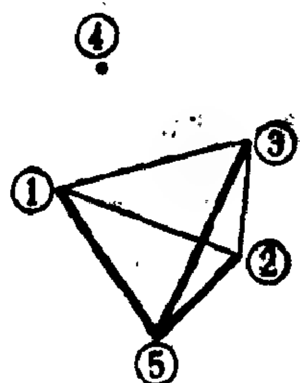


图　四

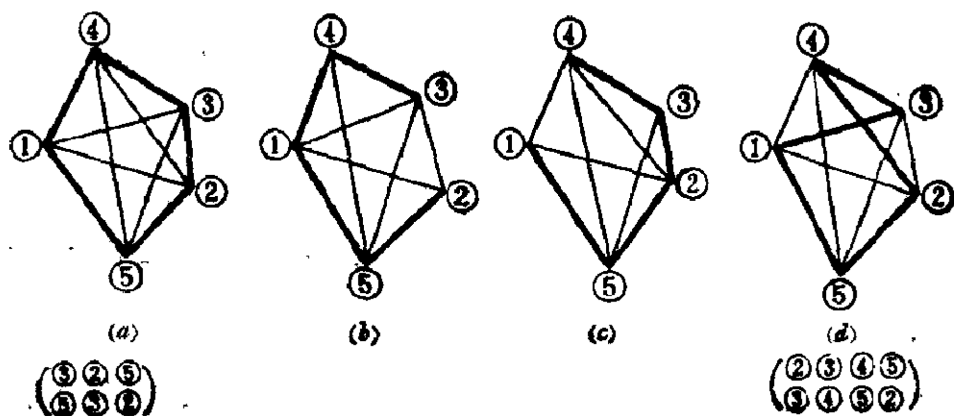
A或C。但应用规则甲于③，便知（⑤，③）不能是C，而只能是A。再将规则乙应用于②，③，⑤，便知（⑤，②）不能是A，而只能是B或C，而若（⑤，②）是C，这样（⑤，①），（⑤，②），（⑤，③）将分别是B,C,A，这样就与规则甲相矛盾．因此（⑤，②）是B，但此时（①，②），（⑤，②），（④，②）分别是A，B，C。这又与规则甲相矛盾。所以（⑤，①）不能是B。这样就导致了矛盾，因此，这个县有五个或五个以上的区是不可能的。再结合1）的讨论，故知：这个县最多只能有 4 个区。

解法二 我们用反证法来证明，如果该县有五个或五个以上的区，那么我们就将第5个区与前四个区的联系情况加以剖析。因为从⑤出发的所有联系方式不能是A、B、C皆具备的，至多只能有两种，不失一般性，我们设这两种是A与B，因此(⑤，①)，(⑤，②)，(⑤，③)，(⑤，④)中只有两种情况发生：一种是有三对或三对以上是一种类型的；另一种是有两对是一种类型，而另外两对又是一种类型的。我们下面就分这两种情况分别讨论之。

1）不失一般性，可设(⑤，①)，(⑤，②)，(⑤，③)都是A（见图五）。这时由规则乙应用到①，②，⑤三个区，可知(①，②)不能是A。不失一般性，可设(①，②)是B，这样，应用规则甲于①，便知(①，③)只能是A或B。但应用规则乙于①，③，⑤，便知(①，③)只能是B或C。因此(①，③)是B。同理，(②，③)是B。这样，①，②，③之间(①，②)，(①，③)，(②，③)都是B，这就与规则乙相矛盾，所以可知本情况不能发生。



图五



$\begin{pmatrix}③②⑤\\⑤③②\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}②③④⑤\\③④⑤②\end{pmatrix}$

图 六

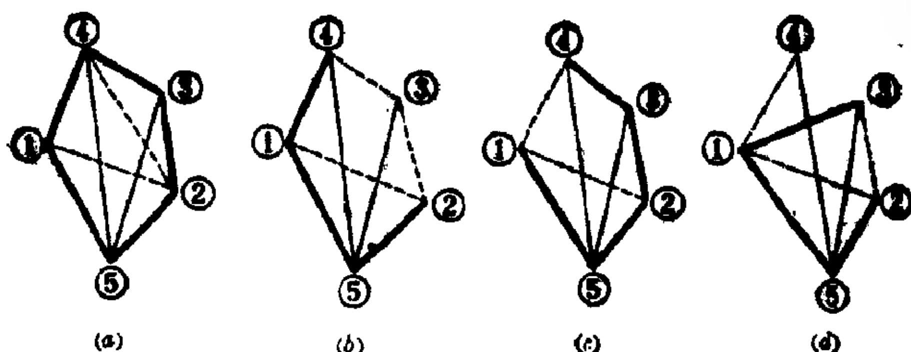


图　七

2）不失一般性，可设

（⑤，①），（⑤，②）是A，

而　　（⑤，③），（⑤，④）是B。

因为应用规则乙于⑤，①，②，便知（①，②）只能是B或C。往下再分两种情况：

第一种情况　（①，②）是B（见图六）。因为将规则甲分别应用于①与②，便知（①，④）只能是A或B，（②，④）也只能是A或B。将这（①，④）与（②，④）的可能情况相互组合，就得到图六中的四种情况：（a），（b），（c），（d）。

在情况（a）中，（①，④）是A，（②，③）亦是A。这时将规则乙应用于③，④，⑤，便知（③，④）只能是A或C，但应用规则甲于④，便知（③，④）不能是C。因此（③，④）是A再应用规则乙于①，③，④，便知（①，③）只能是B或C，但应用规则甲于①，便知（①，③）不能是C，因此（①，③）是B。同理，（②，④）也是B。

在情况（d）中，（①，④）是B，（②，③）亦是B。应用规则乙于①，②，③，便知（①，③）只能是A或C。但应用规则甲于①，便知（①，③）不能是C。所以（①，③）是A，同理（②，④）亦是A。因应用规则乙于④，⑤，③，便知（③，④）只能是A或C。但应用规则甲于④，便知（③，④）不能是C，因此（③，④）是A。

注意在图六中的（a）与（d）两种情况下，①，②，③，④，⑤这五个区两两之间共十对联系中只用到A、B两种方式，即原先①，②，③，④之间进行联系的两种方式。

在情况（b）中，（①，④）是A，而（②，③）是B，应用规则乙于③，④，⑤，便知（③，④）只能是A或C，但应用规则甲于④，便知（③，④）不能是C，因此（③，④）是A。再应用规则乙于①、③、④，便知（①，③）只能是B或C，但应用规则甲于①，便知（①，③）不能是C，故（①，③）是B，这样，对①，②，③而言，它们就与规则乙相矛盾，所以（b）不可能发生。

在情况（c）中，（①，④）是B，而（②，③）是A。仿照情况（b）中相类似的讨论，可知本情况不可能发生。

第二种情况　（①，②）是C，（见图七），同样可知（①，④）可能是A或C，（②，③）可能是A与C。将（①，④）与（②，③）的可能情况相互组合，就得到图七中的四种情况：（a），（b），（c），（d）。

在情况（a）中，（①，④）是A，（②，③）亦是A。应用规则乙于②，③，④，便知（②，④）只能是B或C 但应用规则甲于②，便知（②，④）不能是B，因此（②，④）是C。这样规则甲在④处就得不到满足，因此本情况不可能发生。

在情况（d）中，（①，④）是C，（②，③）亦是C。应用规则乙于①，②，③，便知（①，③）只能是A或B。但应用规则甲于①，便知（①，③）不能是B。所以（①，③）只能是A。这样在③处，规则甲便得不到遵守，因此本情况不可能发生。

在情况（b）中，即（①，④）是A，而（②，③）是C，应用规则乙于③，④，⑤，便知（③，④）只能是A或C。但应用规则甲于③，便知（③，④）不能是A，故（③，④）是C。这样规则甲于④处又得不到满足。因此本情况不可能发生。

在情况(c)中，即(①,④)是C，而(②,③)是A，与(b)相类似的讨论，可知本情况不可能发生。

这样，综合以上所述，可知若这个县内有五个区，那么这五个区之间的联系方式只能是图九中(a)或(d)那两种类型的。现在如果该县有五个或五个以上的区，那么先取定三个区：①，②，③。因为它们之间的联系方式当然不只是一种，但由以上讨论所知，只能是两种，可设之为A、B。如果另外一个区ⓜ($m\neq 1,2,3$)，它与①，②，③之间的联系方式当然只能是A或B、再若有另外一个区ⓝ($n\neq 1,2,3,m$)，那么由①，②，③，ⓜ、ⓝ这五个区之间的联系方式只能是图六中(a)与(d)这两种类型的，亦即(ⓜ,ⓝ)只能是A或B。这就证明了该县内任意两个区之间的联系方式只能是A或B。而这与规则丙相矛盾，所以这个县不能有五个或五个以上的区。再因为我们确实能构造出有四个区的县，这四个区之间的联系方式满足规则甲、乙、丙(如图一中的三种类型)，因此可知：这个县至多只能有四个区

③**解法一** 因为A、B、C是某一三角形的三个内角，所以一定有

$$0<A,\ 0<B,\ 0<C, \tag{1}$$

$$A+B+C=180°. \tag{2}$$

再注意 $\sin 3A+\sin 3B+\sin 3C$

$$=\sin 3A+\sin 3B+\sin(3\cdot 180°-3A-3B)$$

$$=\sin 3A+\sin 3B+\sin 3A\cos 3B+\cos 3A\sin 3B$$

$$=(1+\cos 3A)\sin 3B+\sin 3A\cos 3B+\sin 3A$$

$$=2\cos^2\frac{3A}{2}\sin 3B+2\sin\frac{3A}{2}\cos\frac{3A}{2}\cos 3B+\sin 3A$$

$$=2\cos\frac{3A}{2}\left(\sin 3B\cos\frac{3A}{2}+\cos 3B\sin\frac{3A}{2}\right)+\sin 3A$$

$$=2\cos\frac{3A}{2}\sin\left(3B+\frac{3}{2}A\right)+\sin 3A. \qquad (3)$$

因为　$3B+3A=3(180°-C)$,

所以　$0<3B+3A<3\cdot180°$,

亦即　$0<3B<3\cdot180°-3A$,

因此　$\frac{3}{2}A<3B+\frac{3}{2}A<3\cdot180°-\frac{3}{2}A. \qquad (4)$

这样由(4)式可知$3B+\frac{3}{2}A$的活动范围是$\left(\frac{3}{2}A,3\cdot180°-\frac{3}{2}A\right)$

这个开区间的中点是

$$\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}A+3\cdot180°-\frac{3}{2}A\right)=\frac{3}{2}\cdot180°=270°,$$

而此开区间的长度之半是

$$\frac{1}{2}\left(3\cdot180°-\frac{3}{2}A-\frac{3}{2}A\right)=\frac{3}{2}(180°-A).$$

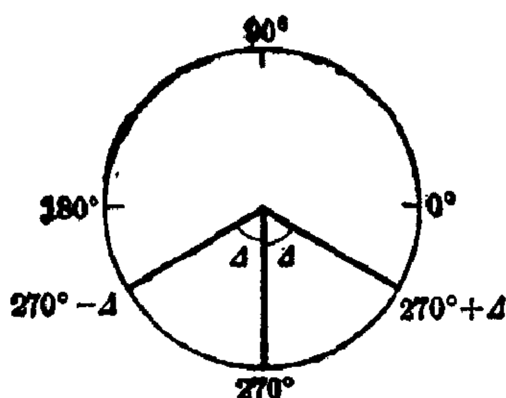
因此　$3B+\frac{3}{2}A=270°\pm\triangle, \qquad (5)$

其中　$0\leqslant\triangle<\frac{3}{2}(180°-A). \qquad (6)$

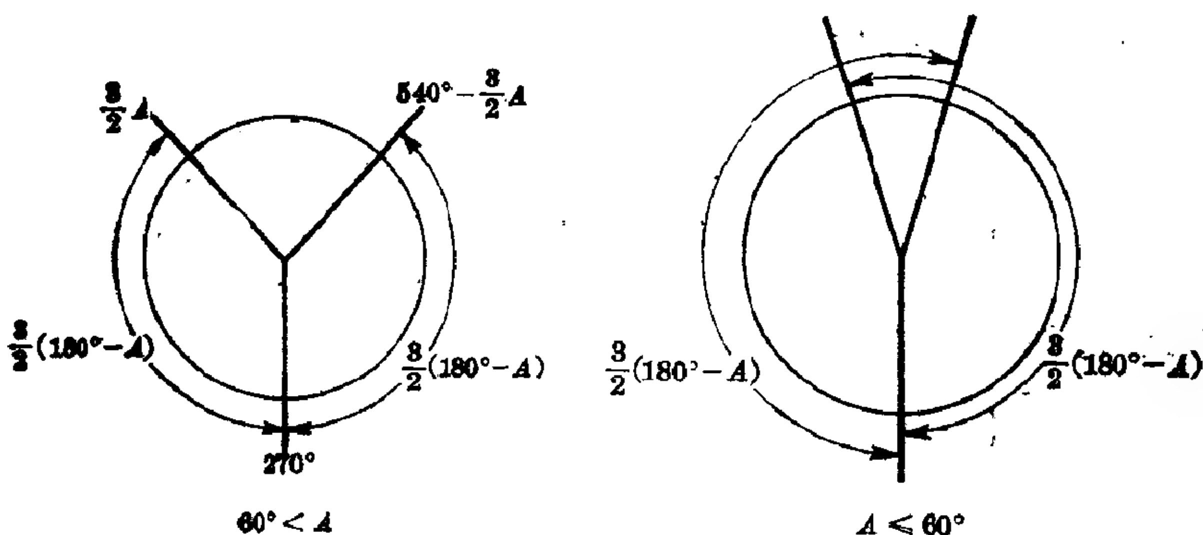
图一给出了(5)式的几何图示，因为$0<180°-A$，所以$3B+\frac{3}{2}A$的活动范围中始终包括270°这一角度，因此

$$\sin\left(3B+\frac{3}{2}A\right)\text{的最小值一定是}-1.$$

那么　$\sin\left(3B+\frac{3}{2}A\right)$的最大值是什么呢？这就要看$\triangle$的变化范围了，从图二上可以看出：当$\triangle<180°$时，亦即$\frac{3}{2}$(180°－



图一



图二

$A) < 180°$，亦即 $60° < A$ 时，$\sin\left(3B + \frac{3}{2}A\right)$ 的最大值是 $\sin\left[270° \pm \frac{3}{2}(180° - A)\right] = \sin\frac{3}{2}A$（注意这时最大值是达不到的）；而当 $\Delta \geq 180°$ 时，亦即 $\frac{3}{2}(180° - A) \geq 180°$ 亦即 $A \leq 60°$ 时，$\sin\left(3B + \frac{3}{2}A\right)$ 的最大值是1.（注意这时最大值是达到的）.（见图二）.

现在再转过来注意(3)式中 $\sin\left(3B + \frac{3}{2}A\right)$ 前面的因子

$2\cos\frac{3}{2}A$，因为

$$0<\frac{3}{2}A<270°,$$

所以，当$0<A\leqslant 60°$时（亦即$0<\frac{3}{2}A\leqslant 90°$时），$2\cos\frac{3}{2}A\geqslant 0$，而当 $60°<A<180°$时$\left(亦即90°<\frac{3}{2}A<270°时\right)$，$2\cos\frac{3}{2}A<0$。因此综合上述对$\sin\left(3B+\frac{3}{2}A\right)$的讨论与$2\cos\frac{3}{2}A$ 的讨论，我们可以得到

$2\cos\frac{3A}{2}\sin\left(3B+\frac{3}{2}A\right)$的最大值与最小值，具体详情请见表一。

这样从表一和(3) 式可以得到

$\sin 3A+\sin 3B+\sin 3C$的最大值是$f(A)$，

其中 $$f(A)=\begin{cases}2\cos\frac{3}{2}A+\sin 3A, & 当\ 0°<A\leqslant 60°,\\ -2\cos\frac{3}{2}A+\sin 3A, & 当 60°<A<180°,\end{cases}$$

$$=2\left|\cos\frac{3}{2}A\right|+\sin 3A.$$

如果令 $f_1(x)=2|\cos x|+\sin 2x$,

那末 $f(A)=f_1\left(\frac{3}{2}A\right)$;

而 $\sin 3A+\sin 3B+\sin 3C$的最小值是$g(A)$,

表一

A的范围	$0°<A\leqslant 60°$	$60°<A<180°$
$2Cos\frac{3}{2}A$的符号	$0\leqslant 2Cos\frac{3}{2}A$	$2Cos\frac{3}{2}A<0$
$Sin(3B+\frac{3}{2}A)$的最小值	-1 (可达到的)	-1 (可达到的)
$Sin(3B+\frac{3}{2}A)$的最大值	1 (可达到的)	$Sin\frac{3}{2}A$ (不可达到的)
$2Cos\frac{3}{2}ASin(3B+\frac{3}{2}A)$ 的最小值	$-2Cos\frac{3}{2}A$ (可达到的)	$2Cos\frac{3}{2}ASin\ \frac{3}{2}A$ (不可达到的)
$2Cos\frac{3}{2}ASin(3B+\frac{3}{2}A)$ 的最大值	$2Cos\frac{3}{2}A$ (可达到的)	$-2Cos\frac{3}{2}A$ (可达到的)

其中
$$g(A)=\begin{cases}-2\cos\frac{3}{2}A+\sin 3A, & 当0°<A\leqslant 60°,\\ 2\cos\frac{3}{2}A\sin\ \frac{3}{2}A+\sin 3A, & 当60°<A<180°,\end{cases}$$

$$=\begin{cases}-2\cos\frac{3}{2}A+\sin 3A, & 当-0°\leqslant A\leqslant 60°,\\ 2\sin 3A & 当\quad 60°<A<180°,\end{cases}$$

如果令
$$g_1(x)=\begin{cases}-2\,|\cos x|+\sin 2x, & 当-90°\leqslant x\leqslant 90°,\\ 2\sin 2x, & 当90°<x<270°,\end{cases}$$

那末
$$g(A)=g_1\left(\frac{3}{2}A\right).$$

如令
$$F=\sup_{x\in(0,270°)} f_1(x),$$

$$G=\inf_{x\in(0,270^\circ)} g_1(x)$$

那末　$G\leqslant\sin3A+\sin3B+\sin3C\leqslant F$。

为此我们有必要绘出函数$f_1(x)$和$g_1(x)$的图形，首先注意$f_1(x)$的周期是180°，因此只要先绘出$f_1(x)$在（−90°，90°）上的图形，当x在(−90°，90°)时，因

$$f_1(x)=2\cos x+\sin2x,$$

$$f_1'(x)=-2\sin x+2\cos2x$$

$$=-2(2\sin^2x+\sin x-1),$$

因此若　$f_1'(x)=0$，

就有　$2\sin^2x+\sin x-1=0$，

即　$x=30^\circ$。

(因$\sin x=-1$，在$x\in(-90^\circ,90^\circ)$内无解)。

这样我们就得到函数$f_1(x)$的图形(见图三)，同样在$x\in(-90^\circ,90^\circ)$时，

$$g_1(x)=-2\cos x+\sin2x,$$

$$g_1'(x)=2\sin x+2\cos2x=-2(2\sin^2x-\sin x-1),$$

因此若　$g_1'(x)=0$，

即　$2\sin^2x-\sin x-1=0$，

也即　$x=-30^\circ$。

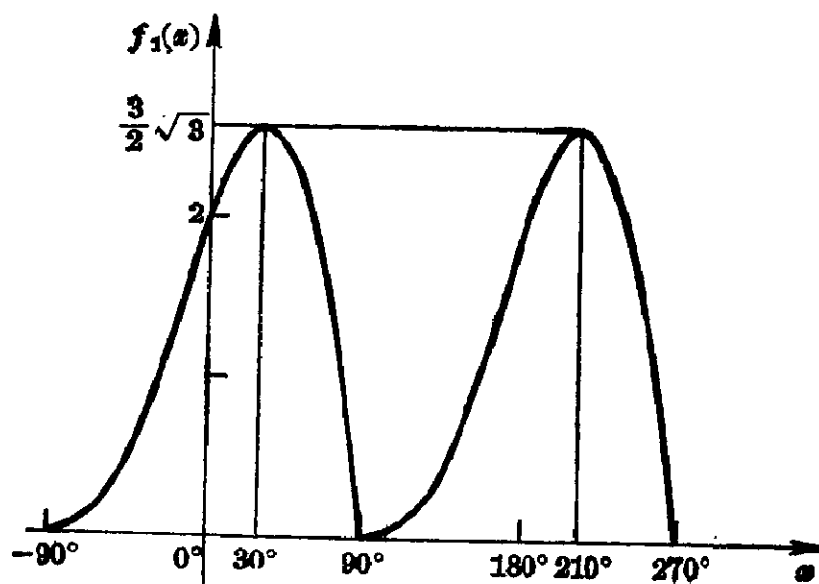
(因$\sin x=1$在$x\in(-90^\circ,90^\circ)$内无解)，这样我们就得到函数$g_1(x)$的图形(见图四)，从图三和图四上我们可得到

$$F=\frac{3}{2}\sqrt{3},\qquad G=-2,$$

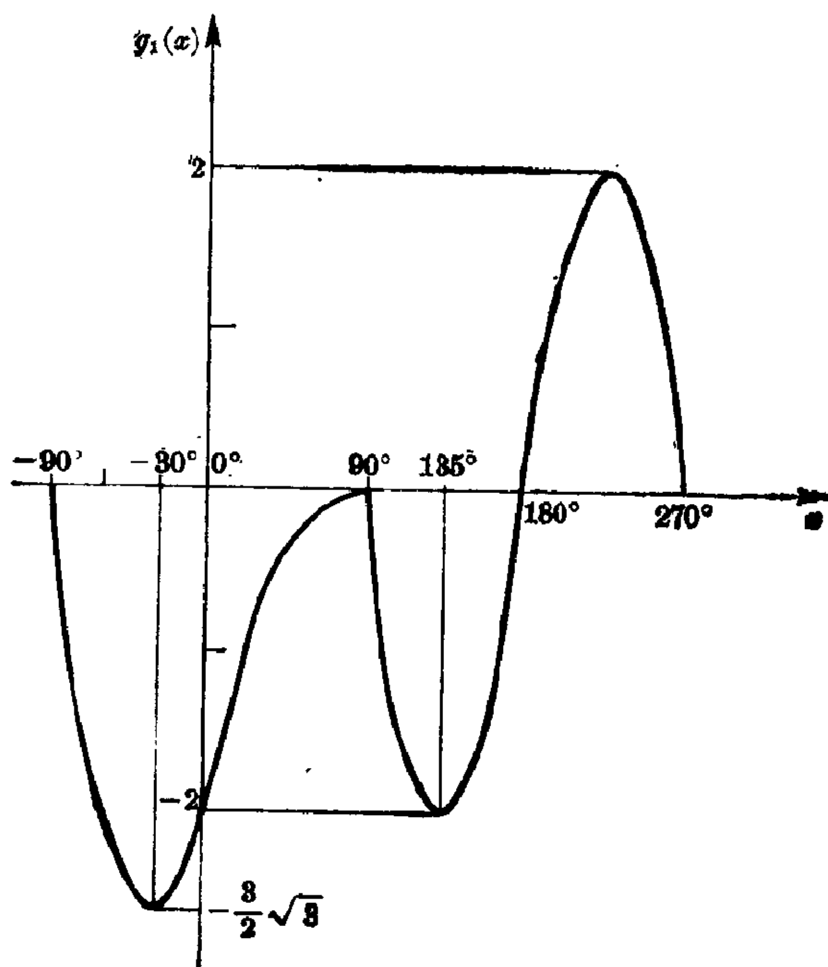
因此

$$\sin3A+\sin3B+\sin3C\leqslant\frac{3}{2}\sqrt{3},\tag{7}$$

$$-2\leqslant\sin3A+\sin3B+\sin3C。\tag{8}$$


$f_1(x)$
$\frac{3}{2}\sqrt{3}$
2
−90°
0°
30°
90°
180°
210°
270°
x

图三


$g_1(x)$
2
−90°
−30°
0°
90°
135°
180°
270°
x
−2
$-\frac{3}{2}\sqrt{3}$

图四

而(7) 式成为等式，一定先有

$$x=30°,\ 210°,$$

亦即 $\frac{3}{2}A=30°,\ 210°,$

$$A=20°,\ 140°.$$

对$A=20°$，从表一上可查知，一定有

$$\sin\left(3B+\frac{3}{2}\cdot 20°\right)=1,$$

也即 $B=20°,\ 140°.$

这样相应的 $C=140°,\ 20°;$

对$A=140°$，从表一上亦可查知，一定有

$$\sin\left(3B+\frac{3}{2}\cdot 140°\right)=-1,$$

也即 $B=20°,$

故 $C=20°.$

因此，当而且只当A,B,C三个角之中有一为140°，而另外两个均为20°时，(7) 式才成为等式.

而(8) 式成为等式，一定先有

$$x=135°,$$

亦即 $A=90°.$

对$A=90°$，从表一可查知，一定有

$$\sin\left(3B+\frac{3}{2}\cdot 90°\right)=\sin\frac{3}{2}\cdot 90°=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

也即 $B=90°,\ 120°,$

相应地有 $C=0°,\ -30°.$

而这是不可能的，故知(8) 式是不能成为等式的。

解法二 对三角形的三个内角A、B、C，不妨可设

$$A \leqslant B \leqslant C. \tag{9}$$

但因 $A+B+C=180°$， (2)

故一定有 $0°<A\leqslant 60°$. (10)

因为否则若$60°<A$，那末 $60°<B$，$60°<C$，而这与(2) 式就要发生矛盾. 因此

$$0°<3A\leqslant 180°,$$

故而 $0\leqslant \sin 3A$， (11)

再加之 $-1\leqslant \sin 3B$，$-1\leqslant \sin 3C$， (12)

就得到 $-2\leqslant \sin 3A+\sin 3B+\sin 3C$. (8)

而为使(8)式成为等式，一定是(12)式与(11)式都要成为等式，因此一定有 $3A=180°$，$3B=270°$，$3C=270°$，亦即$A=60°$，$B=90°$，$C=90°$，而这与(2) 式是发生矛盾的，因此可知(8)式成为等式是不可能的.

现在证明(7) 式。我们仍假设(9) 式成立，我们将开区间$(0°, 180°)$分成三个部份：$(0°, 60°)$，$(60°, 120°)$，$(120°, 180°)$.

由(10)可知 $A\in(0°, 60°)$.

若B,C中任一是在$(60°, 120°)$中，例如说

$$B\in(60°, 120°),$$

那末 $180°<3B\leqslant 360°$，

故而 $\sin 3B\leqslant 0$，

再因为 $\sin 3A\leqslant 1$， $\sin 3C\leqslant 1$，

故而 $\sin 3A+\sin 3B+\sin 3C\leqslant 2<\frac{3}{2}\sqrt{3}$.

若 $C\in(60°, 120°)$ 亦是如此，因此余下只要考虑B和C都不在$(60°, 120°)$中的情况. 但B和C都在$(120°, 180°)$中的情况是不会发生的；B和C都在$(0°, 60°)$中的情况只可能在

$$A=B=C=60°$$

时才能发生，而此时

$$\sin 3A+\sin 3B+\sin 3C=0<\frac{3}{2}\sqrt{3},$$

因此余下只要讨论

$$B\in(0°,\ 60°),\qquad C\in(120°,\ 180°)$$

的情况，亦即

$$0°<A\leqslant B\leqslant 60°,\qquad 120°<C<180°. \tag{13}$$

从(13)可得 $\quad 0°<3A\leqslant 3B\leqslant 180°,\qquad 360°<3C<540°.$ (14)

因此若令 $\quad \alpha=3A,\ \beta=3B,\ \gamma=3C-360°,$

那末从(13)式和(14)式可知

$$0°<\alpha,\ 0°<\beta,\ 0°<\gamma,$$

$$\alpha+\beta+\gamma=180°.$$

亦即α,β,γ可视为某一三角形的三个内角。

但今

$$\begin{aligned}\sin 3A+\sin 3B+\sin 3C&=\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\\&=\sin\alpha+\sin\beta+\sin(\alpha+\beta)\\&=(1+\cos\alpha)\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta+\sin\alpha\\&=2\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin\beta+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\beta+\sin\alpha\\&=2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)+\sin\alpha.\end{aligned} \tag{15}$$

因为 $\qquad 0°<\frac{\alpha}{2}<90°,$

故 $\qquad 0<\cos\frac{\alpha}{2},$

由(15)知 $\sin 3A+\sin 3B+\sin 3C \leqslant 2\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\alpha=f_1\left(\frac{\alpha}{2}\right)$,

其中函数$f_1(x)$被定义为

$$f_1(x)=2|\cos x|+\sin 2x。$$

若令 $$H=\sup_{x\in(0°,90°)} f_1(x)。$$

那末有 $\sin 3A+\sin 3B+\sin 3C \leqslant H$。

而由本题解法一的图三中可看出

$$H=\frac{3}{2}\sqrt{3},$$

因此(7)式得证，而(7)式成为等式，只有可能在

$$\frac{\alpha}{2}=30°,\quad \sin\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)=1$$

时成立，

亦即 $\alpha=60°$, $\beta+30°=90°$,

亦即 $\alpha=60°$，$\beta=60°$，$\gamma=60°$

时(7)式成为等式，这亦即在

$$A=20°,\ B=20°,\ C=140°$$

时(7)式成为等式。

④**解** 如果读者知道一些关于多面角方面的立体几何知识，那么本题是很容易解得的，因为我们要用到下列两个命题：

命题甲 任何一个凸多面角，其所有面角之和小于2π。

命题乙 任何一个凸多面角，其所有二面角之和大于$(n-2)\pi$，其中n是该多面角的面数。

在利用命题甲和命题乙（此二命题，稍后就会作出证明）的基础上，我们来解本题。

因为据题意有

$$\sum \text{面角} = \sum \text{二面角}. \tag{1}$$

再设此凸多面角的面数为 n，那么据命题乙有

$$(n-2)\pi < \sum \text{二面角}.$$

另一方面，据命题甲又有

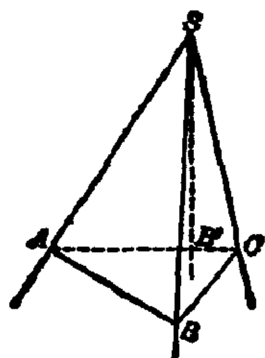
$$\sum \text{面角} < 2\pi.$$

从（1）式得 $(n-2)\pi < 2\pi$.

亦即 $n < 4$.

因此 $n \leqslant 3$,

所以 $n = 3$.



图一

所以此凸多面角一定是一个三面角。

余下的就要证明命题甲和命题乙，为此，我们要先证明命题丙：

命题丙 任何一个三面角，其任一面角小于其它两个面角之和。

命题丙的证明 设此三面角为 $S\text{-}ABC$. 我们要证明（见图一）

$$\angle ASC < \angle ASB + \angle CSB. \tag{2}$$

如果 $\angle ASC \leqslant \angle ASB$,

那么(2)式显然成立，所以现在可设

$$\angle ASC > \angle ASB,$$

只要在此情况下来证明 (2) 式好了. 我们先在 $\angle ASC$ 内作 $\angle ASB' = \angle ASB$. 再在射线 SB 与 SB' 上取线段 $SB = SB'$，过 B, B' 作一平面，与 SA 与 SC 相交于 A, C 两点. 这样因为两边夹一角，所以

$$\triangle ASB' \cong \triangle ASB,$$

所以 $AB' = AB$.

在 $\triangle ABC$ 内 $AC < AB + BC$,

但因 $$AC = AB' + B'C = AB + B'C,$$
所以 $$B'C < BC. \qquad (3)$$
再注意$\triangle B'SC$和$\triangle BSC$内，SC是公共边，$SB = SB'$。所以$\angle B'SC$与$\angle BSC$何者为大就决定于$B'C$与BC中何者为大。但因(3)式，故知
$$\angle B'SC < \angle BSC.$$
这样$\angle ASC = \angle ASB' + \angle B'SC < \angle ASB + \angle CSB$
此即(2)式。故命题丙得证。

现在利用命题丙来证明命题甲。

命题甲的证明 设凸多面角为$S\text{-}A_1A_2\cdots A_n$，其中n为其面数。再设平面Q与此凸多面角相交所截之凸多边形为$A_1A_2\cdots A_n$。(见图二)。在每一侧面三角形中，举例来说在$\triangle A_1SA_2$中，
$$\angle A_1SA_2 = \pi - \angle SA_1A_2 - \angle SA_2A_1.$$
$$\therefore \quad \sum 面角 = n\pi - \sum_1^n \angle SA_iA_{i+1} - \sum_1^n \angle SA_{i+1}A_i \qquad [注1]$$
$$= n\pi - \sum_1^n (\angle A_{i-1}A_iS + \angle A_{i+1}A_iS) \qquad [注2]$$
注意$\angle A_{i-1}A_iS$，$\angle A_{i+1}A_iS$，$\angle A_{i-1}A_iA_{i+1}$正好是三面角$A_i\text{-}A_{i-1}SA_{i+1}$的三个面角。再因为作为三面角$A_i\text{-}A_{i-1}SA_{i+1}$的一个面角的$\angle A_{i-1}A_iA_{i+1}$一定也是多边形$A_1A_2\cdots A_n$的一个内角。(在多面角$S\text{-}A_1A_2\cdots A_n$不是凸的情况下，$\angle A_{i-1}A_iA_{i+1}$就可能成为多边形$A_1A_2\cdots A_n$的一个外角。图三中的顶点$A_3$处便是一例!)这是因为若$\angle A_{i-1}A_iA_{i+1}$是凸多边形的外角，而作为三面角$A_i\text{-}A_{i-1}SA_{i+1}$的一个面角的$\angle A_{i-1}A_iA_{i+1}$一定是小于$\pi$，因此这

[注1] A_{n+1}理解为A_1。

[注2] A_0理解为A_n。

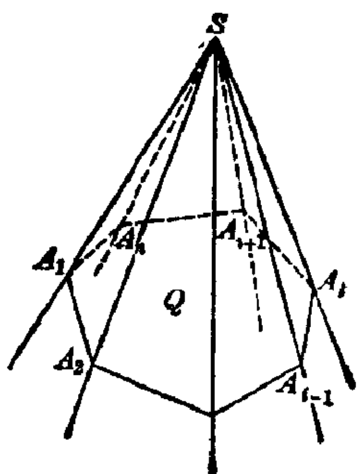
样此凸多边形的内角$\angle A_{i-1}A_iA_{i+1}$便一定是大于π，而这与多边形$A_1A_2\cdots A_n$是凸的这一点相矛盾的。利用命题丙，我们便得

$$\angle A_{i-1}A_iS+\angle A_{i+1}A_iS>\angle A_{i-1}A_iA_{i+1},\ (1\leqslant i\leqslant n).$$

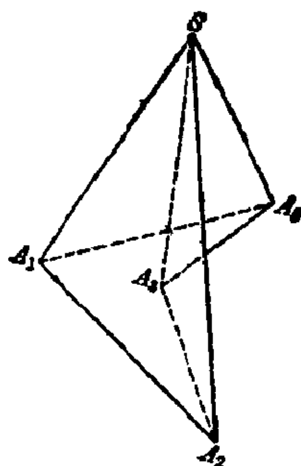
因此 $$\sum\text{面角}<n\pi-\sum_{1}^{n}\angle A_{i-1}A_iA_{i+1}$$

$$=n\pi-(n-2)\pi=2\pi,$$

故 $$\sum\text{面角}<2\pi,$$



图二



图三

现在为了证明命题乙，我们先要证明它的一个特殊情况，即$n=3$时的情况：

命题丁 任何一个三面角，其所有二面角之和大于π。

在证明命题丁之前，我们需要先证明一个引理：

引理 在一平面上有一$\angle MON$。作$M'O\perp MO$，但射线OM'要与ON同居MO的一侧；作$N'O\perp NO$，但射线ON'要与OM同居NO的一侧。这样便有

$$\angle MON+\angle M'ON'=\pi \tag{4}$$

证明 设$\angle MON=\alpha$。分α为锐角和钝角两种情况分别讨论之。当α为锐角时(见图四)，

$$\angle NOM' = \frac{\pi}{2} - \alpha = \angle MON',$$

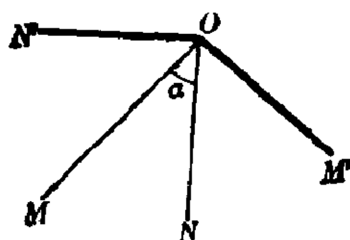
故 $$\angle M'ON' = \alpha + 2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \pi - \alpha;$$

当α为钝角时（见图五），

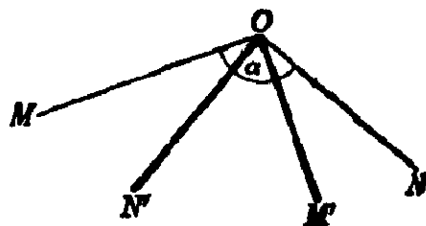
$$\angle NOM' = \alpha - \frac{\pi}{2} = \angle MON',$$

故 $$\angle M'ON' = \alpha - 2\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \pi - \alpha.$$

所以不论哪种情况，（4）式恒成立。



图四　α为锐角



图五　α为钝角

命题丁的证明　设三面角为$S\text{-}ABC$。今作$SA' \perp$平面BSC，而且SA'要与SA位于平面CSB的同侧；同样作SB'与SC'，分别垂直于平面$AS'C$和平面ASB，同时SB'与SB位于平面ASC的同侧，SC'和SC位于平面ASB的同侧，这样以射线SA'，SB'，SC'为棱的一个新产生的三面角$S\text{-}A'B'C'$称之为原三面角$S\text{-}ABC$的补三面角〔注〕，我们现在要证明：

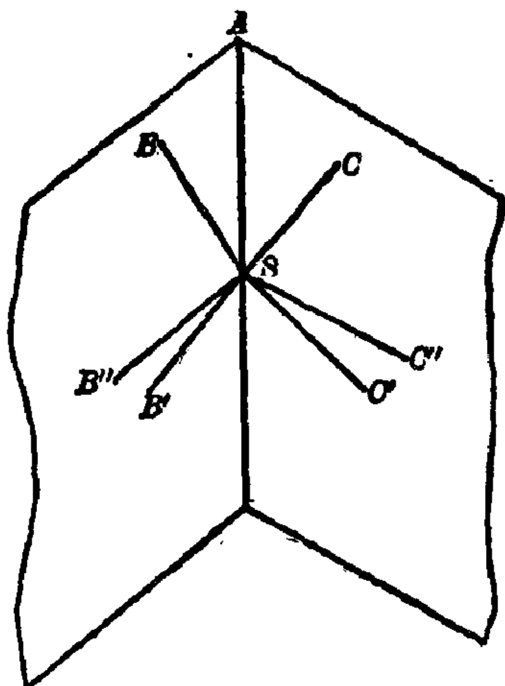
$\angle B'SC'$ + 原三面角中以SA为棱的二面角 $= \pi$，　(5)

$\angle C'SA'$ + 原三面角中以SB为棱的二面角 $= \pi$，　(6)

$\angle A'SB'$ + 原三面角中以SC为棱的二面角 $= \pi$，　(7)

〔注〕读者如想了解更多一些关于补三面角的知识，可参阅：J. 阿莲玛著，朱德祥译，《初等几何教程》下册（立体几何），1966，上海科技出版社，P.57～59.

(5)、(6)、(7) 三式只要证明其中某一个就够了。我们证明(5)式。我们考察原三面角中以SA为棱的二面角(见图六)。在平面BSA中作$B''S\perp SA$，而且使$B''S$与BC位于SA的同侧；再在平面CSA中作$C''S\perp SA$，而且使CS与$C''S$位于SA的同侧。这样



图六

$\angle B''SC''$ = 原三面角中以SA为棱的二面角。

今因$SC'\perp$平面BSA，故$SC'\perp SA$。同理$SB'\perp SA$。所以SB'与SC'都在平面$B''SC''$内。但因$SC'\perp SB''$，而且SC'与SC''位于SB''的同侧；同样$SB'\perp SC''$，而且SB'与SB''位于SC''的同侧。据引理可知

$$\angle B'SC' + \angle B''SC'' = \pi,$$

此亦即 $\angle B'SC'$ + 原三面角中以SA为棱的二面角 $=\pi$，

现在在新的补三面角中应用命题甲，便得

$$\angle A'SB' + \angle B'SC' + \angle C'SA' < 2\pi. \qquad (8)$$

将(5)、(6)、(7)三式代入(8)式，便得

$$\sum_{\text{原三面角}S-ABC} \text{二面角} > \pi.$$

命题乙的证明 设此凸多面角为$S\text{-}A_1A_2\cdots A_n$。而平面$Q$截此凸多面角所得的凸多边形为$A_1A_2\cdots A_n$。在此凸多边形的内部取一点$O$，连接$OA_1$，$OA_2$，…，$OA_n$。(见图七)。因为此多边形是凸的，故$OA_1$，$OA_2\cdots OA_n$都在此多边形内部，因此$OA_1$一定在$\angle A_nA_1A_2$内部，$OA_2$一定在$\angle A_1A_2A_3$内部，……，$OA_n$

一定在$\angle A_{n-1}A_nA_1$内部. 这样对三面角$S\text{-}OA_1A_2$,三面角$S\text{-}OA_2A_3\cdots$，三面角$S\text{-}OA_nA_1$分别应用命题丁，便得

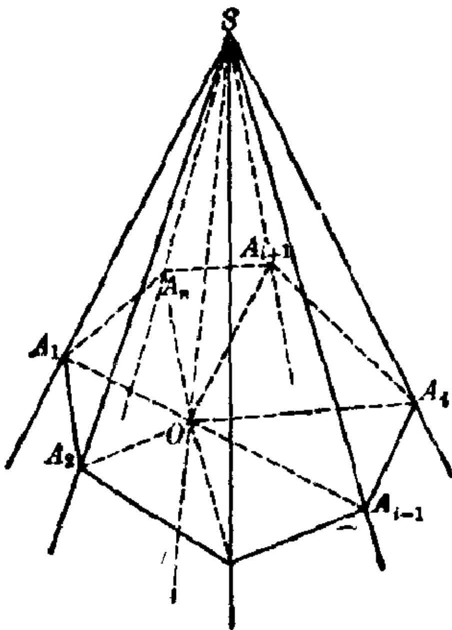
$$二面角OA_1A_2 + 二面角A_1A_2O + 二面角A_1OA_2 > \pi,$$
$$二面角OA_2A_3 + 二面角A_2A_3O + 二面角A_2OA_3 > \pi,$$
$$\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots$$
$$二面角OA_nA_1 + 二面角A_nA_1O + 二面角A_nOA_1 > \pi.$$

将以上各式相加，再注意

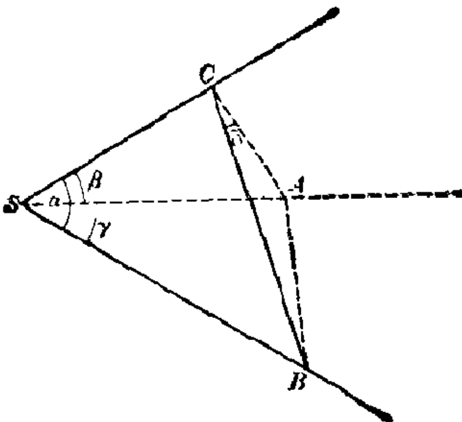
$$二面角A_nA_1O + 二面角OA_1A_2 = 二面角A_nA_1A_2,$$
$$二面角A_1A_2O + 二面角OA_2A_3 = 二面角A_1A_2A_3,$$
$$\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots$$
$$二面角A_{n-1}A_nO + 二面角OA_nA_1 = 二面角A_{n-1}A_nA_1,$$

以及 $$\sum_1^n 二面角A_iOA_{i+1} = 2\pi,$$

便得到 $$\sum_1^n 二面角A_iA_{i+1}A_{i+2} > n\pi - 2\pi = (n-2)\pi.$$



图七



图八

命题戊 设一个三面角的三个面角分别为α，β,γ.面角为α，β的平面所夹的二面角为δ。那末我们有

$$\cos\delta=\frac{\cos\gamma-\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}. \tag{9}$$

证明 设此三面角为$S-ABC$.再设

$\angle BSC=\alpha$，$\angle ASC=\beta$，$\angle ASB=\gamma$。

今取$SC=1$.过C点作SC的垂直平面，分别交SB和SA于B点及A点.(见图八).这样

$$BC=\operatorname{tg}\alpha,\qquad CA=\operatorname{tg}\beta,$$

$$SB=\frac{1}{\cos\alpha}=\sec\alpha,\qquad SA=\frac{1}{\cos\beta}=\sec\beta.$$

再从$\triangle SAB$中应用余弦定理便得

$$AB^2=\sec^2\alpha+\sec^2\beta-2\sec\alpha\sec\beta\cos\gamma.$$

注意 $\angle BCA=\gamma$.

再在$\triangle ACB$中应用余弦定理便得

$$\cos\delta=\frac{\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\beta-AB^2}{2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

$$=\frac{\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\beta-\sec^2\alpha-\sec^2\beta+2\sec\alpha\sec\beta\cos\gamma}{2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

$$=\frac{-2+2\sec\alpha\sec\beta\cos\gamma}{2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=\frac{\cos\gamma-\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

这就证得了(9)式

命题丙的另一证明 设三面角的三个面角为α、β、γ. 再设面角为α、β的平面所夹的二面角为δ,那末由命题戊中的(9)式,便有

$$\cos\delta=\frac{\cos\gamma-\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}. \tag{9}$$

因为　　$0<\alpha<\pi$，　　　　　　$0<\beta<\pi$，

因此　　$0<\sin\alpha$，　　　　　　$0<\sin\beta$.

再因为　　　　　　　　　　　　$\cos\delta<1$，

所以
$$\frac{\cos\gamma-\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}<1.$$

故　　　　$\cos\gamma<\cos(|\alpha-\beta|)$

因为　　　　$0<\gamma<\pi$，　　　$0<|\alpha-\beta|<\pi$.

故一定有　　　$\gamma>|\alpha-\beta|\geqslant\alpha-\beta$

亦即　　　　　　　$\gamma+\beta>\alpha$.

⑤**解**　因为若N是一整数，x是任何实数，那么
$$[N+x]=N+[x].$$

再因为对任何实数x，可以有表达式
$$x=[x]+\alpha, \tag{1}$$

其中　　　　$0\leqslant\alpha<1$.

我们现在要证明的不等式是：对任何正实数x，　　　　〔注〕
$$[nx]\geqslant\frac{[x]}{1}+\frac{[2x]}{2}+\frac{[3x]}{3}+\cdots+\frac{[nx]}{n}. \tag{2}$$

我们将(1)式代入不等式(2)，就得到
$$n[x]+[n\alpha]\geqslant[x]+\frac{[\alpha]}{1}+[x]+\frac{[2\alpha]}{2}+\cdots\cdots+[x]+\frac{[n\alpha]}{n},$$

亦即　$$[n\alpha]\geqslant\frac{[\alpha]}{1}+\frac{[2\alpha]}{2}+\cdots+\frac{[n\alpha]}{n}.$$

这就是说：为了证明(2)式对任何正实数x成立，只需证明它对
$$0<x<1 \tag{3}$$

〔注〕　其实不等式(2)对任何实数x都成立，不只限于正实数，这一点，从往下的推断中即可看出.

成立就够了、下面就在限制(3)之下来证明(2)式。

解法一 我们先注意函数

$$f(x)=[x], \qquad -\infty<x<+\infty,$$

的一些性状．它们（其图象见图一）：

（i）是阶梯函数．即它除了在 x 为整数处发生跳跃外，在这些跳跃点之间函数保持常数．

（ii）是单调增加的．

（iii）是右连续的．即在间断点处的函数值等于该点处函数的右极限。

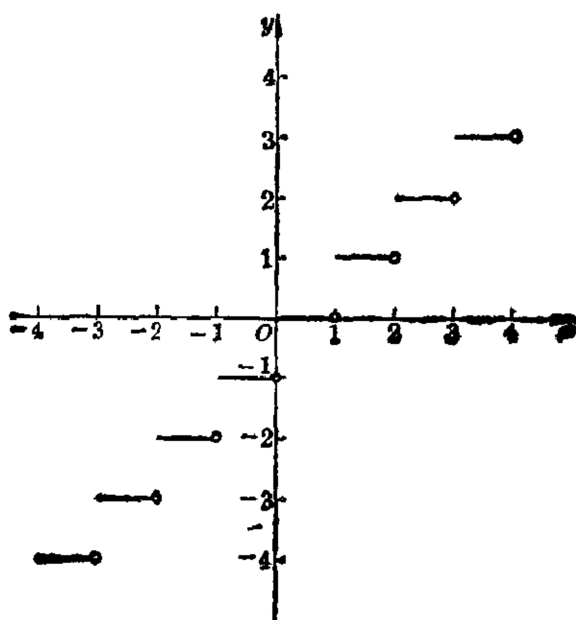
现在再来观察函数

$$g(x)=[nx]$$

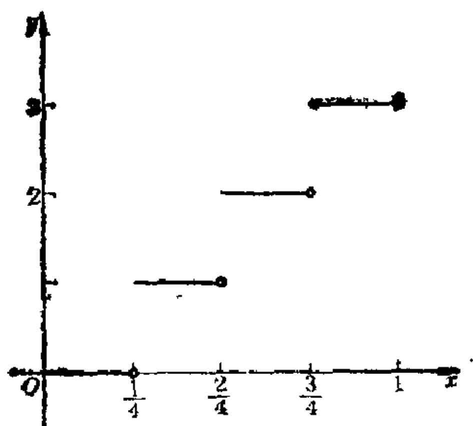
与
$$h(x)=\frac{[x]}{1}+\frac{[2x]}{2}+\cdots+\frac{[nx]}{n}$$

的一些性状。它们〔在图二和图三中分别绘出了 $n=4$，$0\leqslant x\leqslant 1$ 时的 $g(x)$ 和 $h(x)$ 图象〕：

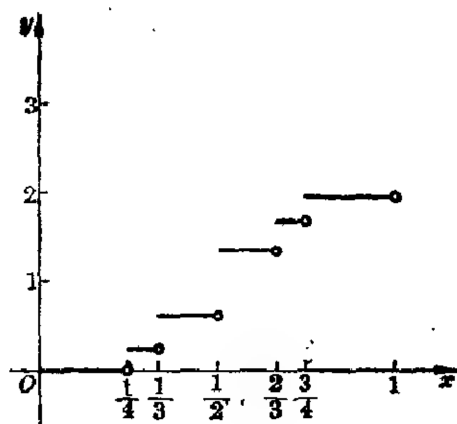
（i）亦都是阶梯函数。限在 $0<x<1$ 上讨论时，$g(x)$ 的



图一 函数 $[x]$ 的图象



图二　函数$[4x]$于$[0,1]$上的图象



图三　函数$\frac{[x]}{1}+\frac{[2x]}{2}+\frac{[3x]}{3}+\frac{[4x]}{4}$于$[0,1]$上的图象

跳跃点是$\frac{1}{n}$，$\frac{2}{n}$，…，$\frac{n-1}{n}$；$h(x)$的跳跃点是所有$\frac{p}{q}$的数，其中p、q为自然数，$2\leqslant q\leqslant n$，$1\leqslant p\leqslant q-1$，$(p,q)=1$.

（ii）亦都是单调增加的. （iii）亦都是右连续的.

现在为证明（2）式，我们只要证明在$h(x)$的间断点处$g(x)\geqslant h(x)$就够了。因为在$h(x)$的两个相邻的间断点（以下分别称之为左端和右端的间断点）之间，$h(x)$保持常数，此常数之值即为那个左端间断点处的$h(x)$函数值（利用右连续性）.而就在这两个间断点之间，$g(x)$是单调增加的。所以$g(x)$的函数值要大于或等于左间断点处$g(x)$的函数值。因此如果在左间断点处$g(x)\geqslant h(x)$，那么就可得到在这两个相邻间断点之间$g(x)\geqslant h(x)$。〔此外注意从0到$h(x)$在$(0,1)$间的第一个间断点之间，$h(x)=0$．而只要$x\geqslant 0$，$g(x)\geqslant 0$．所以在0到$h(x)$在$(0,1)$的第一个间断点之间一定有$g(x)\geqslant h(x)$〕。

今设　　$x=\frac{p}{q}$，　$2\leqslant q\leqslant n$，$1\leqslant p\leqslant q-1$，$(p,q)=1$，

这样 $g\left(\frac{p}{q}\right)=\left[\frac{np}{q}\right]$,

$$h\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{\left[\frac{p}{q}\right]}{1}+\frac{\left[\frac{2p}{q}\right]}{2}+\cdots+\frac{\left[\frac{np}{q}\right]}{n}.$$

但我们可以有

$$\begin{cases}p=a_1q+b_1,\\2p=a_2q+b_2,\\\quad\vdots\\np=a_nq+b_n,\end{cases}$$

其中a_i, b_i为非负整数，而且 $0\leqslant b_i\leqslant q-1$, $1\leqslant i\leqslant n$. (3)

因此 $g\left(\frac{p}{q}\right)=a_n$,

$$h\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{a_1}{1}+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_n}{n}.$$

因而 $qg\left(\frac{p}{q}\right)=qa_n-np-b_n$

$$qh\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{qa_1}{1}+\frac{qa_2}{2}+\cdots+\frac{qa_n}{n}$$

$$=np-\left(\frac{b_1}{1}+\frac{b_2}{2}+\cdots+\frac{b_n}{n}\right)$$

所以 $g\left(\frac{p}{q}\right)\geqslant h\left(\frac{p}{q}\right)$

就等价于 $b_n\leqslant\frac{b_1}{1}+\frac{b_2}{2}+\cdots\cdots+\frac{b_n}{n}$. (4)

注意 $b_n\leqslant q-1$,

故只要证 $\frac{b_1}{1}+\frac{b_2}{2}+\cdots\cdots+\frac{b_n}{n}\geqslant q-1$, (5)

那么(4)式就得证了，但因

$$(p,\ q)=1,$$

由初等数论可知〔注〕：0，p，$2p$，…，$(q-1)p$在以q为模之下构成了一个完全剩余类，因为0仍旧对应着0，所以p，$2p$，…，$(q-1)p$在$\bmod q$之下就是

$$1,2,\cdots\cdots,\ q-1$$

的一个重新排列。亦即在（3）式中的b_1，b_2，…，b_{q-1}是1，2，……，$q-1$的一个重新排列，再因为$n\geqslant q>q-1$，所以

$$\frac{b_1}{1}+\frac{b_2}{2}+\cdots+\frac{b_n}{n}\geqslant\frac{b_1}{1}+\frac{b_2}{2}+\cdots+\frac{b_{q-1}}{q-1}.$$

但是 $$\frac{b_1}{1}+\frac{b_2}{2}+\cdots\cdots+\frac{b_{q-1}}{q-1}\geqslant q-1 \quad (6)$$

的，所以（5）式得证。为了证明（6)式，我们需要下列引理。

引理 $$\min\left(\frac{b_1}{1}+\frac{b_2}{2}+\cdots\cdots+\frac{b_{q-1}}{q-1}\right)=\frac{1}{1}+\frac{2}{2}+\cdots+\frac{q-1}{q-1}$$

$$=q-1,$$

上述的min是在b_1，b_2，…，b_{q-1}是1，2，…，$q-1$的某种排列这种限制下取的。

证明 我们只要证明：对$s<t$，$b_s>s$，一定有

$$\frac{b_s}{s}+\frac{s}{t}>\frac{s}{s}+\frac{b_s}{t}.$$

这是因为 $$\left(\frac{b_s}{s}+\frac{s}{t}\right)-\left(\frac{s}{s}+\frac{b_s}{t}\right)=\frac{(b_s-s)}{s}-\frac{(b_s-s)}{t}$$

〔注〕 可参见N.M.维诺格拉陀夫著，裘光明译，《数论基础》，高等教育出版社，1956，P50～51；

或参见顾可敬《1979—1980中学国际数学竞赛题解》，湖南科学技术出版社，1981，附录一的4

$$=(b_s-s)\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{t}\right)>0.$$

所以对某组$b_1,\cdots,b_{q-1}$，若 $b_1=1$，则往下考察b_2，若$b_1>1$，而$b_t=1$，其中$t>1$，因为

$$\frac{b_1}{1}+\frac{1}{t}>\frac{1}{1}+\frac{b_1}{t}.$$

则可得到 $\frac{b_1}{1}+\cdots+\frac{1}{t}+\cdots+\frac{b_{q-1}}{q-1}>\frac{1}{1}+\cdots+\frac{b_1}{t}+\cdots+\frac{b_{q-1}}{q-1}.$

对b_2再重复以上过程，……一直到对 b_{q-2}进行以上的手续，这样我们就得到

$$\frac{b_1}{1}+\cdots+\frac{b_{q-1}}{q-1}>\cdots>\cdots>\frac{1}{1}+\frac{2}{2}+\cdots+\frac{q-1}{q-1}=q-1.$$

下面是一个以上过程的实例：

$$\frac{5}{1}+\frac{4}{2}+\frac{1}{3}+\frac{3}{4}+\frac{2}{5}$$

$$>\frac{1}{1}+\frac{4}{2}+\frac{5}{3}+\frac{3}{4}+\frac{2}{5}$$

$$>\frac{1}{1}+\frac{2}{2}+\frac{5}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}$$

$$>\frac{1}{1}+\frac{2}{2}+\frac{3}{3}+\frac{5}{4}+\frac{4}{5}$$

$$>\frac{1}{1}+\frac{2}{2}+\frac{3}{3}+\frac{4}{4}+\frac{5}{5}=5$$

解法二 注意

$$nx=\frac{x}{1}+\frac{2x}{2}+\cdots\cdots+\frac{nx}{n},$$

所以和 $[nx]\geqslant\frac{[x]}{1}+\frac{[2x]}{2}+\cdots+\frac{[nx]}{n}$

等价的是 $\{nx\}\leqslant\frac{\{x\}}{1}+\frac{\{2x\}}{2}+\cdots\cdots+\frac{\{nx\}}{n}$,

其中 $\{y\}=y-[y]$。

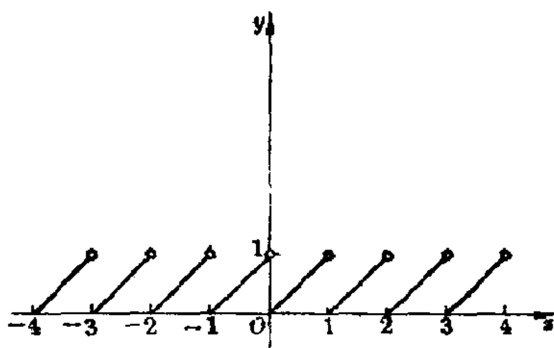
我们先观察函数

$$F(x)=\{x\},\qquad -\infty<x<+\infty,$$

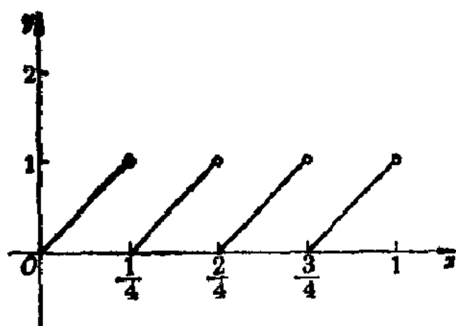
的一些性状。它（其图象见图四）：

（i）是逐段线性函数。即它除了在 x 为整数处发生往下跳跃外，在这些跳跃点之间函数保持为线性函数，其斜率均为1。

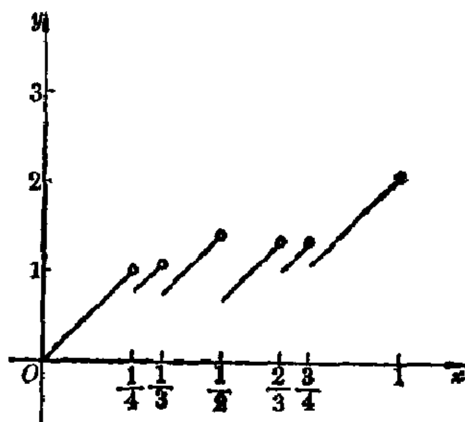
（ii）在每间断点处，函数的跃差为 -1，即 x 自左向右通过间断点时，函数往下跳跃1。



图四 函数{x}的图象



图五 函数$\{4x\}$于$[0,1]$上的图象



图六 函数$\frac{\{x\}}{1}+\frac{\{2x\}}{2}+\frac{\{3x\}}{3}+\frac{\{4x\}}{4}$于$[0,1]$上的图象

（iii）在间断点处函数是右连续的。即在间断点处的函数值等于该点处函数的右极限。

现在再来观察函数

$$G(x)=\{nx\},$$

$$H(x)=\frac{\{x\}}{1}+\frac{\{2x\}}{2}+\cdots\cdots+\frac{\{nx\}}{n}$$

的一些性状，它们〔在图五和图六中分别绘出了$n=4, 0\leqslant x\leqslant 1$时的$G(x)$和$H(x)$的图象〕：

（i）亦都是逐段线性函数，而且此两函数在各线性段上的斜率均为n，所以这些直线段都是相互平行的，而且$G(x)$和$H(x)$的间断点也分别是$g(x)$和$h(x)$的间断点。

（ii）在每间断点处，此两函数的跃差均为负的，即x自左向右通过间断点时，函数是往下跳跃的．

（iii）在间断点处此两函数亦都是右连续的。

现在为了证明在$(0,1)$上(7)式成立，只要证明在$G(x)$的间断点的左侧邻域中(7)式成立就行了．这是因为在$G(x)$的两个间断点（以下称之为左端和右端的间断点）之间，函数$G(x)$的图象是一条连续的直线段，而$H(x)$的图象是由一些直线段组成的．自左端的间断点开始，因为在这些间断点上$G(x)=0$，而对$H(x)$始终有$H(x)\geqslant 0$．所以可知$H(x)$一开始的那个直线段一定不在$H(x)$之下．至于$H(x)$再往右的那些直线段亦一定不会低于$G(x)$．这是因为若有一点$H(x)<G(x)$，自此点再向右的x，一定都有$H(x)<G(x)$．那是由于在到达$G(x)$的右端间断点之前，$G(x)$是连续的，不再下跌；而$H(x)$的那些直线段都要与$G(x)$的直线段平行，而且$H(x)$在间断点处的跃差都是负的．这样就导致在$G(x)$的右端间断点的左侧领域中$H(x)<G(x)$．这就与讨论的前提相矛盾了．

现在就来证明在$G(x)$的间断点的左侧邻域中(7)式成立，因为$G(x)$在$[0, 1]$中的间断点是

$$0,\ \frac{1}{n},\ \frac{2}{n},\ \cdots,\ \frac{n-1}{n},\ 1.$$

所以对 $$x=\frac{k}{n}-\varepsilon,\qquad 1\leqslant k\leqslant n,$$

其中ε是一个充分小的正实数，我们有

$$G\left(\frac{k}{n}-\varepsilon\right)=\left\{n\left(\frac{k}{n}-\varepsilon\right)\right\}=\left\{k-n\varepsilon\right\}=1-n\varepsilon.$$

此外再设

$$(n,\ k)=d,$$

那么 $n=dv,\qquad k=du,\qquad (u,\ v)=1$

这样 $$x=\frac{k}{n}-\varepsilon=\frac{u}{v}-\varepsilon,$$

$$H\left(\frac{k}{n}-\varepsilon\right)=H\left(\frac{u}{v}-\varepsilon\right)$$

$$=\frac{\left\{\frac{u}{v}-\varepsilon\right\}}{1}+\frac{\left\{\frac{2u}{v}-2\varepsilon\right\}}{2}+\cdots+\frac{\left\{\frac{nu}{v}-n\varepsilon\right\}}{n}$$

注意 $$n\geqslant v,$$

所以 $$H\left(\frac{k}{n}-\varepsilon\right)\geqslant\frac{\left\{\frac{u}{v}-\varepsilon\right\}}{1}+\frac{\left\{\frac{2u}{v}-2\varepsilon\right\}}{2}+\cdots$$

$$+\frac{\left\{\frac{vu}{v}-v\varepsilon\right\}}{v}.$$

再因为可以有

$$\begin{cases} u=a_1v+b_1, \\ 2u=a_2v+b_2, \\ \cdots\qquad\cdots \\ (v-1)u=a_{v-1}v+b_{v-1}, \end{cases}$$

其中a_i，b_i是非负整数，而且 $0\leqslant b_i\leqslant u-1$，$1\leqslant i\leqslant v-1$

因为 $(v,\ u)=1$，所以b_1，b_2，…，b_{v-1}是1，2，…，$v-1$ 的一个重新排列（见本题解法一中的脚注）。所以现在

$$H\left(\frac{k}{n}-\varepsilon\right) \geqslant \frac{\left\{\frac{u}{v}-\varepsilon\right\}}{1} + \frac{\left\{\frac{2u}{v}-2\varepsilon\right\}}{2} + \cdots \quad \cdots + \frac{\left\{\frac{vu}{v}-v\varepsilon\right\}}{v}$$

$$= \frac{\left\{a_1+\frac{b_1}{v}-\varepsilon\right\}}{1} + \frac{\left\{a_2+\frac{b_2}{v}-2\varepsilon\right\}}{2}$$

$$+\cdots+\frac{\left\{a_{v-1}\frac{b_{v-1}}{v}-(v-1)\varepsilon\right\}}{v-1} + \frac{\left\{u-v-\varepsilon\right\}}{v}$$

$$= \frac{\frac{b_1}{v}-\varepsilon}{1} + \frac{\frac{b_2}{v}-2\varepsilon}{2} + \cdots + \frac{\frac{b_{v-1}}{v}-(v-1)\varepsilon}{v-1} + \frac{1-v\varepsilon}{v}$$

$$= \frac{1}{v}\left(\frac{b_1}{1}+\frac{b_2}{2}+\cdots+\frac{b_{v-1}}{v-1}\right)+\frac{1}{v}-v\varepsilon$$

$$\geqslant \frac{1}{v}\left(\frac{1}{1}+\frac{2}{2}+\cdots+\frac{v-1}{v-1}\right)+\frac{1}{v}-v\varepsilon$$

$$= \frac{1}{v}(v-1)+\frac{1}{v}-v\varepsilon$$

$$= 1-v\varepsilon \geqslant 1-n\varepsilon = G\left(\frac{k}{n}-\varepsilon\right)$$

这就证得了所要求的不等式，其中用到了解法一中的引理。

加拿大1981年（第十三届）数学竞赛题解

①**解** 因为对任何实数x，我们总可将之表示为

$$x=N+\alpha, \qquad (1)$$

其中N是一整数（可正、可负，亦可为零），而α是一满足

$$0\leqslant\alpha<1 \qquad (2)$$

的实数。再因为对任何实数y和整数M，我们有

$$[M+y]=M+[y]. \qquad (3)$$

因此 $[x]=N$,

$[2x]=[2N+2\alpha]=2N+[2\alpha]$,

$[4x]=[4N+4\alpha]=4N+[4\alpha]$,

$[8x]=[8N+8\alpha]=8N+[8\alpha]$,

$[16x]=[16N+16\alpha]=16N+[16\alpha]$,

$[32x]=[32N+32\alpha]=32N+[32\alpha]$.

故原方程 $[x]+[2x]+[4x]+[8x]+[16x]+[32x]$

$$=12345 \qquad (4)$$

成为 $(N+2N+4N+8N+16N+32N)$

$+([2\alpha]+[4\alpha]+[8\alpha]+[16\alpha]+[32\alpha])=12345$,

亦为 $[2\alpha]+[4\alpha]+[8\alpha]+[16\alpha]+[32\alpha]$

$$=12345-63N. \qquad (5)$$

注意因为（2）式，故

$0\leqslant2\alpha<2$, $0\leqslant4\alpha<4$, $0\leqslant8\alpha<8$,

$0\leqslant16\alpha<16$, $0\leqslant32\alpha<32$.

因此 $0\leqslant[2\alpha]\leqslant1$, $0\leqslant[4\alpha]\leqslant3$, $0\leqslant[8\alpha]\leqslant7$,

$0\leqslant[16\alpha]\leqslant15$, $0\leqslant[32\alpha]\leqslant31$.

将这些不等式代入方程式（5），就得到

$$0 \leqslant 12345 - 63N \leqslant 1 + 3 + 7 + 15 + 31,$$

亦即 $$0 \leqslant 12345 - 63N \leqslant 57,$$

故 $$12345 - 57 \leqslant 63N \leqslant 12345,$$

亦即 $$\frac{12288}{63} = \frac{12345 - 57}{63} \leqslant N \leqslant \frac{12345}{63},$$

此即 $$195.0476191\cdots\cdots \leqslant N \leqslant 195.952381\cdots\cdots,$$

而这与N是一个整数这一点是矛盾的，因此原方程（4）无实数解.

②**解** 我们设$\angle RPQ = \alpha$.（见图一）。这样当R点沿OP一侧的圆周移动时，

$$0 \leqslant \alpha \leqslant 90°.$$

再因$\angle ROP = 2\alpha$，因此

$$PR = 2r\sin\alpha,$$

因而 $$RQ = PR\sin\alpha = 2\gamma\sin^2\alpha,$$

$$PQ = PR\cos\alpha = 2\gamma\sin\alpha\cos\alpha.$$

这样若设$\triangle PQR$的面积为S，那么

$$S = \frac{1}{2} \cdot PQ \cdot QR$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2r\sin\alpha\cos\alpha \cdot 2r\sin^2\alpha$$

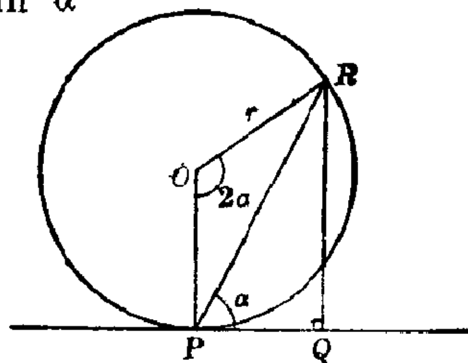
$$= 2r^2\sin^3\alpha\cos\alpha.$$

所以现在问题是求函数

$$f(\alpha) = \sin^3\alpha\cos\alpha$$

在 $$0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$$

上的极值. 我们对函数$f(\alpha)$求导数，有



图一

$$f'(\alpha) = 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \sin^3\alpha(-\sin\alpha)$$

$$=\sin^2\alpha(3\cos^2\alpha-\sin^2\alpha).$$

因此若要求极值点，那么必定是使$f'(\alpha)=0$的点，亦即是

$$3\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=0,$$

亦即 $\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{3}$,

故 $\alpha=60°$.

因此我们可知在$\alpha=60°$时，面积S取得极大值

$$S=2r^2(\sin 60°)^3\cos 60°$$

$$=2r^2\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\frac{3\sqrt{3}}{8}r^2\approx 0.6495r^2$$

③**解** 因为只有有限条直线，所以它们之间的交点也只有有限个，因此总可以在平面P上选择一个直角坐标系XOY，便得

(i)在半平面$x\geqslant 0$内再没有这些直线的交点；

(ii)所有的直线皆不与Y轴平行.

由于(ii)，每条直线在此坐标系之下的斜率一定是有限数。设第i条直线的斜率为a_i，在y轴上的截距为b_i，亦即第i条直线的方程为

$$y=a_ix+b_i.$$

今取 $B=\max\limits_i b_i=b_I$.

我们要证明在开区域(是一角状区域)

$$D=\{(x,\ y)\,|\,x>0,\ y>a_Ix+b_I\}$$

内不再有原先的任何直线，所以在区域D之内可绘一充分大的圆。在D之内不再有直线是因为若在D之内有直线，那么此直线一定不是第I条直线，而且一定要与第I条直线相交。因为若

是平行的话，那么此直线在Y轴上的截距b'一定有

$$b' > b_I = B = \max_i b_i \geqslant b'.$$

这样 $b' > b'$,

就产生了矛盾。而在相交的情况下，那么交点一定在半平面$x < 0$之内，这样此直线与Y轴的交点一定在$y > B$之内，也就是此直线在Y轴上的截距又要大于B。这样又会产生矛盾。所以D之内无直线。

至于所要求构造的直线序列可这样产生：令全体有理数(因为是可列的)为

$$r_1,\ r_2,\ \cdots,\ r_n,\ \cdots\cdots$$

作直线L_n: $x = r_n$, $n \geqslant 1$.

这是一列平行Y轴的直线。可知任何圆必定要与这些直线中的某一条相遇。

④解 因为$P(x)$与$Q(x)$是全实轴上的连续函数，因为方程

$$P(x) = Q(x)$$

无实数解，那么意味着要么

$$P(x) > Q(x), \qquad -\infty < x < +\infty; \qquad (1)$$

要么 $$P(x) < Q(x), \qquad -\infty < x < +\infty. \qquad (2)$$

不失一般性可设(1)成立。因此若方程

$$P[P(x)] = Q[Q(x)] \qquad (3)$$

有一实数解a，亦即

$$P[P(a)] = Q[Q(a)],$$

那么有$P[Q(a)] > Q[Q(a)] = P[P(a)] > Q[P(a)] = P[Q(a)]$,

这样 $P[Q(a)] > P[Q(a)]$,

也就得出了矛盾，所以方程(3)无实数解。

⑤解法一 为便于叙述，要先规定一些记号与术语。我们用①，②，③，…等表示各队，圆圈中的数字表示各队的编号，如果总共有①，②，③，④，⑤，⑥，⑦，⑧八个队，而某天安排②，⑤，⑧队作观众，而①，③，④，⑥，⑦队作演出，那么此天的安排就记为

$$d=(①，③，④，⑥，⑦|②，⑤，⑧)。\quad (1)$$

再若我们用A表示由①，③，④，⑥，⑦五队所构成的集合，B表示由②，⑤，⑧三队所构成的集合，即

$$A=\{①，③，④，⑥，⑦\},$$

$$B=\{②，⑤，⑧\},$$

那么(1)式中的表示亦可记为

$$d=(A|B)。$$

对(1)式中的表达式，其实际涵义是

$$(①，③，④，⑥，⑦|②，⑤，⑧)$$

$$=(①|②)\cup(③|②)\cup(④|②)\cup(⑥|②)\cup(⑦|②)$$

$$\cup(①|⑤)\cup(③|⑤)\cup(④|⑤)\cup(⑥|⑤)\cup(⑦|⑤)$$

$$\cup(①|⑧)\cup(③|⑧)\cup(④|⑧)\cup(⑥|⑧)\cup(⑦|⑧).$$

像上式中$\{①|②\}$之类的形式，即$(A|B)$，其中A和B都是只有一个队的集合，我们称之为一个单元。像安排d就包含15个单元。

如果有n个队①，②，……，n。以及一个m天的安排d_1，d_2，…，d_m。我们称这个安排是满足全面观摩要求的，是指对任何i，$j\in\{1, 2, \cdots, n\}$，$i\neq j$，一定能有一d_k，$1\leqslant k\leqslant m$，使

$$(i|j)\in d_k.$$

我们用$f(n)$表示对n个队在满足全面观摩要求之下最少的安排天数。下面我们要证明一系列引理，这些引理在往下的论证过

程中是都要用到的.

引理一 如果安排

$d_1=(A_1|B_1)$, $d_3=(A_2|B_2)$, ……, $d_m=(A_m|B_m)$

是满足全面观摩要求的，那么安排

$d_1'=(B_1|A_1)$, $d_2'=(B_2|A_2)$, ……,

$d_m=(B_m'|A'_m)$亦是满足全面观摩要求的.这个原理可称之为对偶原理.

证明 只要证明对$i_1 j\in\{1, 2, \cdots, n\}$, $i\neq j$, 存在某个k，使

$(i|j)\in d_k'$

就行了. 因为对$(j|i)$，存在d_k，使

$(j|i)\in d_k=(A_k|B_k)$.

这样 $j\in A_k$, $i\in B_k$,

所以 $(i|j)\in(B_k|A_k)=d'_k$.

引理二 对$2\leqslant n\leqslant 6$，我们有

n	2	3	4	5	6
$f(n)$	2	3	4	4	4

证明 对$n=2$，因为(①|②)和(②|①)不能在同一天内安排，所以$f(2)=2$. 其中

$d_1=$(①|②), $d_2=$(②|①)

是满足全面观摩要求的唯一一种安排.

对$n=3$，因为只有两种类型的安排:

类型甲 演出是2个队，观众是1个队.

类型乙 演出是1个队，观众是2个队.

但是不论对类型甲或是类型乙，其包含的单元都是2个. 而在$n=3$时，总共有$3\times2=6$个单元. 所以至少要安排3天.

同时，我们也确是存在一种安排，它满足全面观摩要求，同时天数是 3 天：

$$\begin{cases} d_1 = (①|②, ③), \\ d_2 = (②|③, ①), \\ d_3 = (③|①, ②). \end{cases}$$

此外还有一种安排，它是

$$\begin{cases} e_1 = (②, ③|①), \\ e_2 = (③, ①|②), \\ e_3 = (①, ②|③). \end{cases} \tag{2}$$

容易看出，第一种安排是第二种安排的对偶。

对$n=4$，因为共有三种类型的安排：

类型甲　演出是 3 个队，观众是 1 个队。

类型乙　演出是 2 个队，观众是 2 个队。

类型丙　演出是 1 个队，观众是 3 个队。

在类型甲和丙中，所含单元都是 4 个。而在类型乙中，所含单元是 4 个。而对$n=4$。总共有$4\times3=12$个单元，如果能用三天安排得满足全面观摩要求，那一定是每天的安排都是类型乙的。不失一般性，总可（通过队之间编号的置换）使

$$d_1=(①, ②|③, ④).$$

如果　$d_2=(A_2|B_2)$，

其中A_2和B_2都是两个队的集合。如果

$$A_2\cap\{①, ②\}=\text{空集合},$$

亦即　$A_2=\{③, ④\}$，

即　$d_2=(③, ④|①, ②)$.

那末在最后的安排d_3中不可能同时将(①|②)，(②|①)这两个单元都包含进去。因此产生矛盾。余下的只能是

$$A_2\cap\{①, ②\}=\text{一个队},$$

不失一般性，可设

$$A_2=\{②,\ ③\},$$

即 $$d_2=(②,\ ③|①,\ ④).$$

因为d_2和d_1有一个公共的单元(②|④)，因此d_1和d_2只占了7个单元，在第三天的安排d_3中至多只能含有4个单元，所以无论如何总有一个单元在d_1，d_2和d_3中都没有，因此与全面观摩的要求不符．所以 $f(4)>3$．但确实存在四天的安排，使之满足全面观摩要求，如

$$\begin{cases} d_1=(①,\ ②|③,\ ④), \\ d_2=(③,\ ④|①,\ ②), \\ d_3=(②,\ ③|①,\ ④), \\ d_4=(①,\ ④|②,\ ③). \end{cases} \tag{3}$$

因此 $$f(4)=4.$$

在$n=5$时，因为总共有$5\times4=20$个单元，而每天安排的类型至多只能占有6个单元，所以无论如何总有$f(5)>3$．但从另一方面确实存在一个四天的安排，使之满足全面观摩要求，这个安排可以是

$$\begin{cases} d_1=(①,\ ②|③,\ ④,\ ⑤), \\ d_2=(④,\ ⑤|①,\ ②,\ ③), \\ d_3=(①,\ ③,\ ④|②,\ ⑤), \\ d_4=(②,\ ③,\ ⑤|①,\ ④). \end{cases} \tag{4}$$

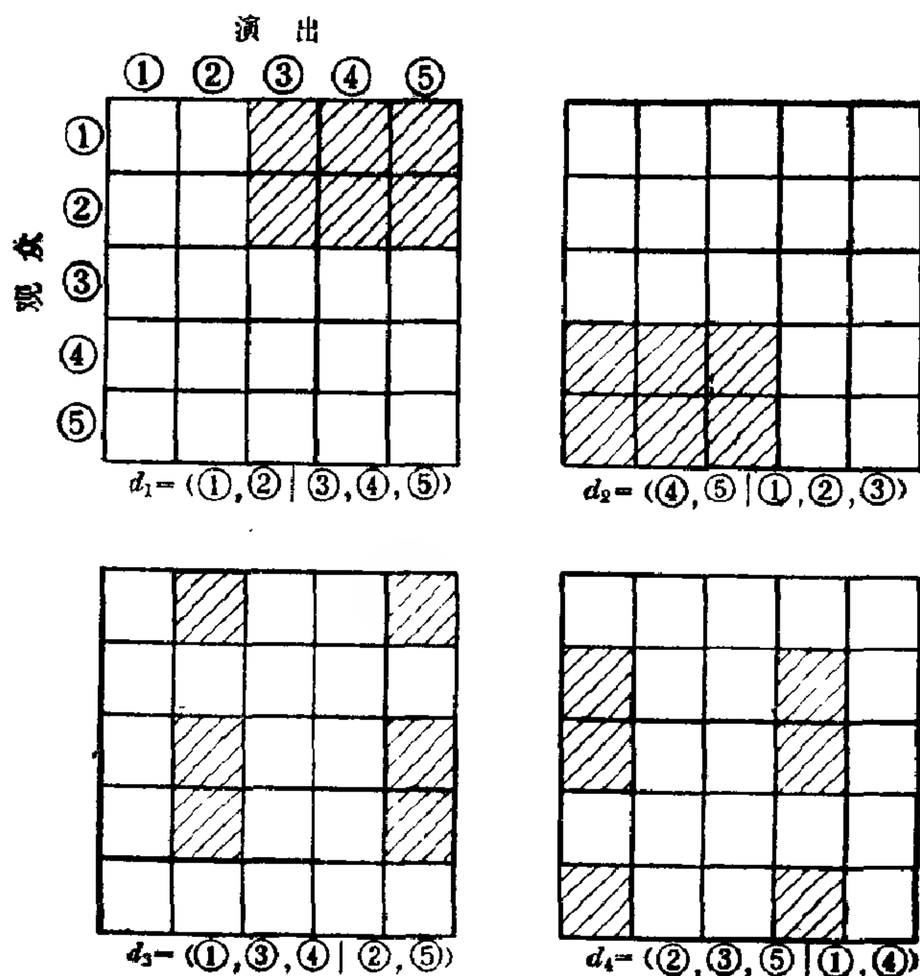
因此 $$f(5)=4.$$

在$n=6$时，因为总共有$6\times5=30$个单元，而每天安排的类型至多只能占有9个单元，所以无论如何总有$f(6)>3$．但从另一方面确实存在一个四天的安排，使之满足全面观摩的要求，这个安排可以是

$$
\begin{cases}
a_1 = (①,\ ②,\ ③ \mid ④,\ ⑤,\ ⑥), \\
d_2 = (①,\ ⑤,\ ⑥ \mid ②,\ ③,\ ④), \\
d_3 = (②,\ ④,\ ⑤ \mid ①,\ ③,\ ⑥), \\
d_4 = (⑧,\ ④,\ ⑥ \mid ①,\ ②,\ ⑤).
\end{cases} \qquad (5)
$$

因此 $\qquad f(6)=4$。

对于这种每天安排我们可以用一种几何图形的形式来表示。以$n=5$为例。我们绘出一5×5的棋盘格，横向表示演出队，竖向表示观众队。如果$(i\mid j)\in d$，那么我们就将横向第i条与竖向第j条交汇的方格绘以斜影(见图一的第一个图)。图一中就绘出了(3)式中的四天安排，它们合起来就将整个5×5的棋盘格除主对角线外的小方格全部覆盖，这就是“全面观摩要求”的体现。



图一

引理三　在$n=3$而且用3天进行安排以达到全面观摩的要求时，总可以在队的编号之间进行一次置换，使得这三天的安排是下列之一：

$$\begin{cases} d_1=(①|②,\ ③), \\ d_2=(②|③,\ ①), \\ d_3=(③|①,\ ②); \end{cases} \quad (6) \qquad \begin{cases} e_1=(②,\ ③|①), \\ e_2=(③,\ ①|②), \\ e_3=(①,\ ②|③). \end{cases} \quad (7)$$

安排d_1，d_2，d_3的图示是图二，安排e_1，e_2，e_3的图示是图三。注意在小方格中填的数字表示第几天。

	①	②	③
①		1	1
②	2		2
③	3	3	

图二　安排d_1，d_2，d_3。

	①	②	③
①		2	3
②	1		3
③	1	2	

图三　安排e_1，e_2，e_3。

证明　在引理二关于$n=3$的部份中已经证明了$f(3)=3$。我们现在要证明：此时三天的安排只能是两种类型：要么全是两队演出，一队观看的；要么全是一队演出，两队观看的，因为如果有一种安排：其中一天是一队观看，两队演出；另一天是两队观看，一队演出。那末为了使这两天每天产生的单元不重复(因为否则三天所产生的单元就不到6个)，这两天的安排，不失一般性，只能是：

$$h_1=(①|②,\ ③),\ h_2=(②,\ ③|①).$$

因为余下的单元是(②|③)和(③|②)，它们是不能在一天之内安排的。因此这种安排就一定要大于或等于4天，所以与原设不符。

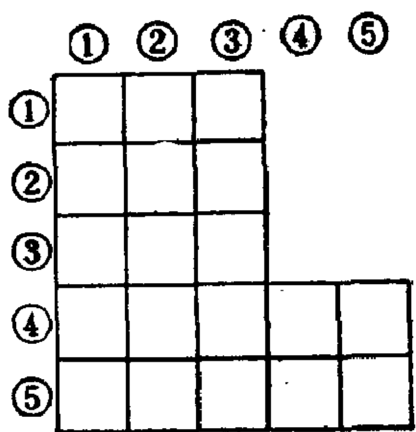
余下的，就是如何可以在队的编号之间进行一次置换，使得这些安排呈规范的形式(6)或(7)。这我们通过一个例子来

加以说明，如

$$\begin{cases} g_1 = (③\,|\,①,\ ②), \\ g_2 = (①\,|\,②,\ ③), \\ g_3 = (②\,|\,①,\ ③), \end{cases}$$

那末我们可以将这些队的编号作置换

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$



图四

在这置换后 g_1，g_2，g_3就呈形式

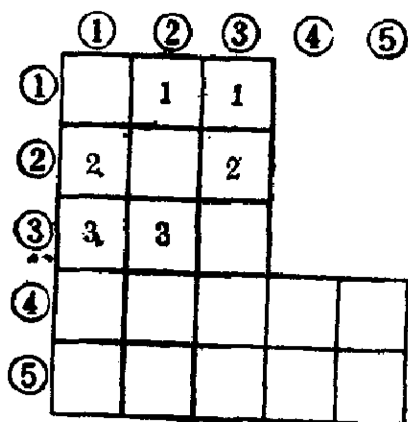


图 五

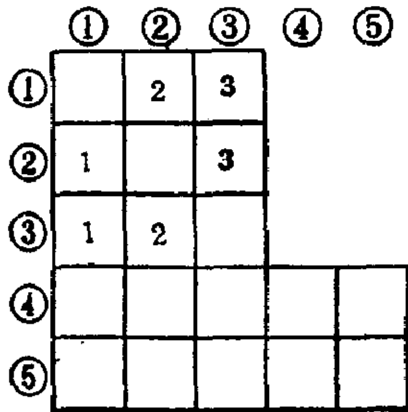


图 六

$$\begin{cases} g_1 = (①\,|\,②,\ ③), \\ g_2 = (②\,|\,③,\ ①), \\ g_3 = (③\,|\,②,\ ①), \end{cases}$$

引理四 如果图四中所有非主对角线上的单元要在三天内覆盖完，那末在①，②③这三个队之间的三天安排一定是图五这种类型的，而不能是图六那种类型(注意在图五中1-1，2-2，3-3的连线方向是与较窄的长条平行的；而在图六中1-1，2-2，3-3的连线方向是与较窄的长条垂直的)。

证明 因为由引理三可知，就①，②，③这三个队之间要在三天内满足全面观摩的要求，那么只能要么是图五中那种安排，要么是图六中那种安排。如果是图六中那样安排，因为①

队只在第 1 天演出，所以为了使（④|①）与（⑤|①）都能被覆盖，所以④，⑤在第 1 天一定要作为观众。同理④，⑤在第 2 天和第 3 天也都要作为观众。因此无论如何（④|⑤）与（⑤|④）就不能被覆盖了。而在图五那种安排下，确实存在一种安排，使图四中的非主对角线单元全部被覆盖掉（见图七）：

$$\begin{cases} d_1 = (①, ④, ⑤ | ②, ③), \\ d_2 = (②, ④ | ①, ③, ⑤), \\ d_3 = (③, ⑤ | ①, ②, ④). \end{cases}$$

引理五 如果在图八中非主对线上的单元要在三天内覆盖完，那么在三天之内的安排只能是图九中那种类型，而不能是图十、图十一和图十二中那三种类型。（注意在图九那种类型中，左边的1-1连线方向是水平的，而右边的1-1连线方向是竖直的。）

	①	②	③	④	⑤
①		1	1		
②	2		2		
③	3	3			
④	2	1	1,2		2
⑤	3	1,3	1	3	

图七

	①	②	③	④	⑤	⑥
①						
②						
③						
④						
⑤						
⑥						

图八

证明 因为由引理三可知，①，②，③三个队在这三天内的安排只有两种类型，同样，④，⑤，⑥三个队在这三天内的安排亦只有两种类型，这样相互组合起来就构成了图九，图十，图十一和图十二四种情况，因为对①，②，③三个队与④，⑤，⑥三个队之间的搭配情况目前已成定局，可根据每种情况

	1	1			
2		2			
3	3				
				2	3
			1		3
			1	2	

图九

	2	3			
1		3			
1	2				
				2	3
			1		3
			1	2	

图十

	1	1			
2		2			
3	3				
				1	1
			2		2
			3	3	

图十一

	2	3			
1		3			
1	2				
				1	1
			2		2
			3	3	

图十二

	1	1			
2		2			
3	3				
2,3	3	2		2	3
3	1,3	1	1		3
2	1	1,2	1	2	

图十三　由图九推算而得

	2	3			
1		3			
1	2				
	2	3		2	3
1		3	1		3
1	2		1	2	

图十四　由图十推算而得

	1	1			
2		2			
3	3				
	1	1		1	1
2		2	2		2
3	3		3	3	

图十五　由图十一推算而得

	2	3			
1		3			
1	2				
1				1	1
	2		2		2
		3	3	3	

图十六　由图十二推算而得

推算出来，图十三，图十四，图十五和图十六就填出了这种推算，由图上可看出，只有在图十三中，①，②,③三个队与④，⑤，⑥这三个队之间的 9 个单元在三天内是被覆盖的，所以只有图九中安排是满足要求的。

现证　$f(11)=6$、

先证　$f(11)\leqslant 6$。

即我们首先构造一种 6 天的安排，使11个队之间能达到全面观摩的要求，这个安排是：

$d_1=$ (①,②,③,④,⑤ | ⑥,⑦,⑧,⑨,⑩,⑪),

$d_2=$ (⑥,⑦,⑧,⑨,⑩,⑪ | ①,②,③,④,⑤),

$d_3=$ (①,②,⑥,⑦,⑧ | ③,④,⑤,⑨,⑩,⑪),

$d_4=$ (④,⑤,⑥,⑩,⑪ | ①,②,③,⑦,⑧,⑨),

$d_5=$ (①,③,④,⑦,⑨,⑩ | ②,⑤,⑥,⑧,⑪),

$d_6=$ (②,③,⑤,⑧,⑨,⑪ | ①,④,⑥,⑦,⑩),

这个安排是如何构造出来的呢？其中d_1和d_2是使①,②,③,④,⑤这一组与⑥,⑦,⑧,⑨,⑩,⑪那一组之间完全观摩到，所以从第 3 天开始就不必考虑这两组成员“跨组”的观摩，而只要考虑各“组内”的观摩，所以d_1和d_2是起一种“割裂”的作用，

使把一个$n=11$的问题分解为两个问题：一是$n=5$的问题，一个是$n=6$的问题。因为在引理二中我们研究过$n=5$，$n=6$两种情况，得到$f(5)=4=f(6)$，而且已构造出具体的安排（见(4)式和(5)式），所以就可将这些安排拿来就用。所以在d_3，d_4，d_5，d_6中所产生的"跨组"观摩与d_1，d_2之间的单元是重复的，是副产品.（正象两组之间各自安排演出，而使用同一剧场那样！）

往下要证　$f(11)>5$,

即不可能在5天之内作出满足全面观摩要求的安排。我们用反证法，即如果存在一个5天的安排d_1，d_2，d_3，d_4，d_5，使它们满足全面观摩的要求。设

$$d_1=(A_1|B_1),\quad |A_1|=m_1,\quad |B_1|=n_1,$$

$$d_2=(A_2|B_2),\quad |A_2|=m_2,\quad |B_2|=n_2.$$

其中$|A_1|=m_1$表示集合A_1的队的数目是m_1，余同。注意

$$m_1+n_1=11,\quad m_2+n_2=11.$$

此外再设　$B_2\cap B_1=\triangle$,　　$|\triangle|=\delta$.

这样我们从图形上来看一下d_1，d_2的表示（见图十七）。不失一般性，我们总可使B_1中的队安排在图十七中演出栏的右侧。同样不失一般性，可使$\triangle$中的队安排在图十七演出栏中B_1的左侧，这样在图十七的图示中所标的数字表示各集合中队的数目。绘有斜影的部份即是d_1，d_2，而未绘斜影的部份分别编为Ⅰ，Ⅱ，…Ⅹ，共9块。

注意在图十七中Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ块都是正方形，边长分别为$11+\delta-n_1-n_2$，$n_2-\delta$，δ，$n_1-\delta$。这是因为

$$m_1+\delta-n_2=11-n_1+\delta-n_2=11+\delta-n_1-n_2$$

之故．因为d_1,d_2已经用了2天，那么余下的只有3天，而在这3天中要把Ⅰ，Ⅱ，…，Ⅸ这9块中非主对角线上的单元全部覆盖掉，因此在Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ这四块的每一块中，也都要在3天之

图十七

内覆盖掉．但因为Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ这四块中每块的演出队的集合就是观众队的集合，再因为$f(3)=3$，$f(4)=4$．以及$n\geqslant 4$时$f(n)\geqslant 4$，所以一定有

$$\begin{cases} 11+\delta-n_1-n_2\leqslant 3, & (8)\\ n_2-\delta\leqslant 3, & (9)\\ \delta\leqslant 3, & (10)\\ n_1-\delta\leqslant 3. & (11)\end{cases}$$

将(9)，(10)，(11)三式相加，得到 $n_1+n_2-\delta\leqslant 9$．

而(8)式即 $8\leqslant n_1+n_2-\delta$．

$8\leqslant n_1+n_2-\delta$．

因此只有两种可能：$n_1+n_2-\delta=8$或9．在$n_1+n_2-\delta=9$时，一定同时有 $n_2-\delta=3$，$\delta=3$，$n_1-\delta=3$．亦即 $n_1=6$，$\delta=3$，$n_2=3$，而在 $n_1+n_2-\delta=8$时，总共有三种可能：

$$\begin{cases} n_2-\delta=2, \\ \delta=3, \\ n_1-\delta=3; \end{cases} \quad \begin{cases} n_2-\delta=3, \\ \delta=2, \\ n_1-\delta=3; \end{cases} \quad \begin{cases} n_2-\delta=3, \\ \delta=3, \\ n_1-\delta=2. \end{cases}$$

亦即 $\begin{cases} n_1=6, \\ n_2=5, \\ \delta=3; \end{cases} \quad \begin{cases} n_1=5, \\ n_2=5, \\ \delta=2; \end{cases} \quad \begin{cases} n_1=5, \\ n_2=6, \\ \delta=3. \end{cases}$

再因为 $n_1=6$，$n_2=5$，$\delta=3$时，其对偶（即$d_1'=(B_1|A_1)$，$d_2'=(B_2|A_2)$）为 $n_1=5$，$n_2=6$，$\delta=3$. 这是因为

$$A_1=\overline{B_1},\ A_2=\overline{B_2},\ A_1\cap A_2=\overline{B_1}\cap\overline{B_2}=\overline{(B_1\cup B_2)},$$

其中$\overline{A}$表示集合A的余集合．再因为$n_1=5$，$n_2=5$，$\delta=2$时，其对偶为$n_1=6$，$n_2=6$，$\delta=3$。再由引理一可知，我们现在为了证明对11个队，5天安排不能满足全面观摩的要求，所以只要证明对 $n_1=6$，$n_2=6$，$\delta=3$，以及$n_1=5$，$n_2=6$，$\delta=3$这两种情况是不可能的就行了.

在$n_1=5$，$n_2=6$，$\delta=3$的情况　其图示见图十八，对Ⅲ，Ⅳ，Ⅴ 3块来看，由引理四可知，在第Ⅲ块上的安排只能如图十九所示，再对Ⅰ，Ⅸ，Ⅳ 3块来看，由引理四可知，在第Ⅰ块上的安排只能如图十九所示。这样对第Ⅱ块来看，由引理三可知，只能是两种安排，要么是图廿中那样，要么是图廿一中那样．如果是图廿中那样安排，那么对Ⅱ，Ⅲ，Ⅶ 3块来看，就与引理五的结果相违背。如果第Ⅱ块按图廿一中那样来安排，那么对Ⅰ，Ⅱ，Ⅵ 3块来看，就与引理五的结果相违背．因此得到了矛盾，所以$n_1=5$，$n_2=6$，$\delta=3$是不可能的。

在$n_1=6$，$n_2=6$，$\delta=3$的情况　其图示见图廿二。对Ⅰ，Ⅱ，Ⅵ 3块来看，由引理四可知，在第Ⅱ块上的安排只能如图廿三所示．再对Ⅰ，Ⅲ，Ⅷ 3块来看，由引理四可知，在第Ⅲ块上的安排只能如图廿三所示。这样对Ⅱ，Ⅲ，Ⅵ 3块来看，

图十八

图十九

	5	6
4	II	6
4	5	

图　廿

	4	4
5	II	5
6	6	

图廿一

图廿二

图廿三

他们就与引理五的结果相违背，所以$n_1=6$，$n_2=6$，$\delta=3$的情况是不可能的。

至此我们完全证明了$f(11)=6$，即对11个队而言，要安排它们之间全面观摩，至少得6天。

解法二 在解法一中，我们是根据每天将所有的队分成“演出”与“观众”两大类，将这种关系作为我们讨论的基础，在本解法中，我们将这种关系采用另一种形式来表达，即将每天的日期：第1天，第2天，……作为一种“参数”，如果有①，②，③，④四个队，第1天是③，④演出，第2天是①，②演出，第3天是①，④演出，第4天是②，③演出，那么我们就记为

$$A_1=\{2,3\},\ A_2=\{2,4\},\ A_3=\{1,4\},\ A_4=\{1,3\}.$$

其中$A_1=\{2,3\}$就表示第一个队在第2天，第3天演出，而在第1天，第4天作观众，所以在这种记法上，日期是起着一种“参数”的作用，队与队之间是否有观摩的关系是蕴含在各队的演出日期这种安排之内的。

一般，可设有m天，令集合

$$M=\{1,2,\ \cdots,\ m\}.$$

再设共有n个队，每个队的演出日期是M的一个子集合，所以得到n个M的子集合 A_1，A_2，…，A_n。

我们有下列引理六。

引理六 下列各点是相互等价的：

(i)安排A_1，$A_2\cdots$，A_n是满足全面观摩要求的，即每个队可以至少观看其它任何一个队的演出一次。

(ii)对任何$1\leqslant i, j\leqslant n$，$i\neq j$.

$$A_i\overline{A_j}\text{〔注〕}\text{不是空集.} \qquad (12)$$

〔注〕 其中$\overline{A}$表示A的余集.

(iii)对任何 $1 \leqslant i, j \leqslant n$, $i \neq j$

$$A_i \subseteq A_j \text{不成立。} \qquad (13)$$

证明 由(i)能推得(ii)，因为如果$A_i\overline{A_j}$是空集，那么就不存在第j个队观看第i个队演出的情况，这就与全面观摩的要求不符。

由(ii)能推得(iii)，因为如果$A_i \subseteq A_j$成立，那么$\overline{A_j} \subseteq \overline{A_i}$，因此$A_j\overline{A_i} \subseteq A_j\overline{A_j}$。因为$A_j\overline{A_j}$是空集，因此$A_j\overline{A_i}$是空集，这就与(12)式不合。

由(iii)能推得(i)，因为如果第i个队始终看不到第j个队的演出，这就意味着第j个队在演出时，第i个队也在演出，所以$A_j \subseteq A_i$，这就与(13)式不符，因此A_1，A_2，…，A_n是满足全面观摩要求的。

因此可知若A_1，…，A_n是满足全面观摩要求的，那么由(13)式可知，对$i \neq j$、$Ai \neq Aj$。

与解法一中的引理一相仿，这里有对偶原理的另一种表达形式，这就是

引理七 若A_1，A_2，…，A_n是满足全面观摩要求的，那么$\overline{A_1}$，$\overline{A_2}$，…，$\overline{A_n}$ 亦是满足全面观摩要求的。

证明 这是因为对$1 \leqslant i, j \leqslant n$，$i \neq j$，

$$\overline{A_i}\overline{\overline{A_j}} = \overline{A_i}A_j = A_j\overline{A_i}$$

不是空集，所以$\overline{A_1}$，…，$\overline{A_n}$满足全面观摩要求的。

现在证明$f(11)=6$。〔注1〕

首先我们构造出一个安排A_1，A_2，…，A_{11}，其中的$M=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，

使之是满足(13)式的。今取

〔注1〕 关于函数$f(n)$的定义，请见本题解法一开头的一段。

$A_1=\{1, 2\}$, $A_2=\{1, 3\}$, $A_3=\{1, 4\}$, $A_4=\{1, 5\}$,

$A_5=\{2, 3\}$, $A_6=\{2, 4\}$, $A_7=\{2, 5\}$, $A_8=\{3, 4\}$,

$A_9=\{3, 5\}$, $A_{10}=\{4, 5\}$, $A_{11}=\{6\}$.

显然这一组A_i是满足(13)式的。因此$f(11)\leqslant 6$。

往下再证明对

$$M'=\{1, 2, 3, 4, 5\}, \tag{14}$$

是无法构造出A_1，A_2，…，A_{11}，使之满足全面观摩要求的、我们用反证法，即设A_1，A_2，…A_{11}都是(14)式的子集，但是满足全面观摩的要求。

首先我们证明 $|A_i|$〔注2〕$\neq 1$，$1\leqslant i\leqslant 11$.这是因为若有一A_i，$|A_i|=1$，不妨可设$|A_1|=1$.和$A_1=\{1\}$.这样由引理六的(13)式可知，A_2，…A_{11}中都不包含有$\{1\}$.因此A_2…A_{11}是10个

$$M^{11}=\{2, 3, 4, 5\}$$

的子集，它们对M^{11}是满足全面观摩要求的.我们接着要证明$|A_i|\neq 1$，3，$2\leqslant i\leqslant 11$.这是因为若有一i，$2\leqslant i\leqslant 11$，使$|A_i|=1$,不失一般性,可设$|A_2|=1$和$A_2=\{2\}$.这样A_3，…A_{11}这9个集合中就都不包含有$\{2\}$，因此A_3，A_4，…A_{11}是9个

$$M^{111}=\{3, 4, 5\}$$

的子集，它们对M^{11}是满足全面观摩要求的,但因为M^{111}的所有真子集总共只有6个：$\{3\}$，$\{4\}$，$\{5\}$，$\{3, 4\}$，$\{3, 5\}$，$\{4, 5\}$，因此A_3，…，A_{11}中必定有两个是一样的，这就导致了矛盾。因此$|A_i|\neq 1$．$2\leqslant i\leqslant 11$。同样，若有某一i，$2\leqslant i\leqslant 11$，使$|A_i|=3$，那么不失一般性，可设$|A_2|=3$以及$A_2=\{2, 3, 4\}$,这样A_3，A_4，…A_{11}这9个集合就只能是$\{5\}$，$\{2, 5\}$，

〔注2〕 $|A|$表示集合A中队的个数。

{3, 5}, {4, 5}, {3,4,5}, {2, 4, 5}, {2, 3, 5}这7个集合中的某一个. 这又产生了矛盾. 因此 $|A_i| \neq 3$, $2 \leqslant i \leqslant 11$. 因此我们有

$$|A_i| = 2, \qquad 2 \leqslant i \leqslant 11.$$

但因为M^{11}的所有只包含两天的子集合,总共只有6个,{2,3},{2, 4}, {2, 5}, {3, 4}, {3, 5}, {4, 5}. 这又导致A_2, A_3, …, A_{11}中会有两个是一样的, 这又产生了矛盾. 所以

$$|A_i| \neq 1, \qquad 1 \leqslant i \leqslant 11. \tag{15}$$

同样

$$|A_i| \neq 4, \qquad 1 \leqslant i \leqslant 11. \tag{16}$$

这是因为$\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$, …, $\overline{A}_{11}$也是对M满足全面观摩要求的(见引理七). 所以 $|\overline{A}_i| \neq 1$, $1 \leqslant i \leqslant 11$. 但因$|A_i| = 5 - |\overline{A}_i|$, 所以(16)式成立.

所以现在只可能是

$$|A_i| = 2,\ 3, \qquad 1 \leqslant i \leqslant 11.$$

我们设A_1, …, A_{11}中有P个是$|A| = 2$的, 而有g个是$|A| = 3$的. 当然

$$p + g = 11. \tag{17}$$

我们先证$g \geqslant 6$. 这是因为若$g \leqslant 5$, 那么有可能$g \leqslant 2$和$g \geqslant 3$这两种情况. 因为M的只包含两天的子集合总共只有$\binom{5}{2} = 10$个, 因此若$p = 10$, 那么$g = 1$. 而且那个只有三天的子集合必定要包含这10个只包含两天的子集合的某一, 因此这与(13)式矛盾. 因此必定是$p \leqslant 9$, 亦$p \geqslant 2$. 在$g = 2$时, 不妨设$|A_1| = |A_2| = 3$, 而且$A_1 = \{1, 2, 3\}$, 那么对A_2, 可能与A_1相交只有一天, 也可能与A_1相交有两天. 在前者之下, 可设$A_2 = \{3, 4, 5\}$. 这样A_1和A_2就包含了{1, 2}, {2, 3}, {1, 3}, {3, 4}, {3, 5}, {4, 5}这6个两天的子集合. 所以A_i中两天的子集合都不

能取这6个，所以还只剩下4个可取的. 因此　$p\leqslant4$. 这样 $11=p+g\leqslant4+2=6$，就产生了矛盾. 在A_2与A_1相交是两天的情况下，可设$A_2=\{2, 3, 4\}$. 这样A_1和A_2就包含了$\{1, 2\}$，$\{2, 3\}$，$\{1, 3\}$，$\{2, 4\}$，$\{3, 4\}$这5个两天的子集合. 因此$p\leqslant5$，因此$11=p+g\leqslant5+2=7$，也产生了矛盾. 所以$g\geqslant3$. 在此情况下，可设$|A_1|=|A_2|=|A_3|=3$. 而且仍可设$A_1=\{1,2,3\}$，$A_2=\{3, 4, 5\}$或$\{2, 3, 4\}$. 在$A_2=\{3, 4, 5\}$时. 因为如果A_3的3个两天子集合都是在$\{1, 2\}$，$\{1, 3\}$，$\{2, 3\}$，$\{3, 4\}$，$\{3, 5\}$，$\{4, 5\}$之中，那么这3个两天子集合，必定在$\{1, 2\}$，$\{1, 3\}$，$\{2, 3\}$那一组中或在$\{3, 4\}$，$\{3, 5\}$，$\{4, 5\}$这一组中，而且其中必定有一组有A_3的3个两天子集合中的某两个. 这就导致$A_3=A_2$或$A_3=A_1$，也就产生了矛盾. 在$A_2=\{2, 3, 4\}$时，亦会产生类似的矛盾. 因此A_3的三个两天子集合加到由A_1和A_2各个的两天子集合所产生的组中去时，至少要使这个组增加一个新的两天子集合. 因为由A_1和A_2各个的两天子集合起来至少有5个天两子集合，因此由A_1，A_2和A_3各别的两天子集合合起来时至少有6个两天子集合，由引理六的(13)式可知，这就导致$p\leqslant10-6=4$，因此$g\geqslant11-4=7$. 这与原设$g\leqslant5$矛盾、因此必定有

$$g\geqslant6. \tag{18}$$

另一方面，我们要证明$p\geqslant6$. 这是因为若$p\leqslant5$，那末有可能$p\leqslant2$和$p\geqslant3$. 因为M′的只包含三天的子集合总共只有$\binom{5}{3}=10$个. 因此若$g=10$，那么$p=1$，而那个只有两天的子集合p定要被包含在这10个只包含三天的子集合的某一中. 因此这与(13)式矛盾. 因此必定是$q\leqslant g$，亦即$p\geqslant2$. 在$p=2$时不妨可设$|A_1|=|A_2|=2$，而且$A_1=\{1, 2\}$。而A_2，不失一般性，有可能

是{2，3}或者是{3，4}．在$A_2=\{2, 3\}$时．A_3，…，A_{11}中就不可能取{1，2，3}，{1，2，4}，{1，2，5}，{2，3，4}，{2，3，5}．因此A_3，…，A_{11}只能取10－5＝5个三天的子集合．因此A_3，…，A_{11}中一定有两个相合．这就导致了矛盾．在$A_2=\{3, 4\}$时．也会产生类似的矛盾．因此$p\geqslant 3$．我们可设$|A_1|=|A_2|=|A_3|=2$．对A_1，A_2，A_3，不失一般性，它们不外乎是下列四种类型的某一：

类型甲　$A_1=\{1, 2\}$，$A_2=\{2, 3\}$，$A_3=\{4, 5\}$；

类型乙　$A_1=\{1, 2\}$，$A_2=\{2, 3\}$，$A_3=\{3, 4\}$；

类型丙　$A_1=\{1, 2\}$，$A_2=\{2, 3\}$，$A_3=\{3, 1\}$；

类种丁　$A_1=\{1, 2\}$，$A_2=\{2, 3\}$，$A_3=\{2, 4\}$．

这是因为M'是五天的，而A_1，A_2，A_3都是两天的子集合，因此A_1，A_2，A_3中必定有两个是相交的缘故．

在类型甲之下，A_i中那些三天的子集合是不能取{1,2,3}，{1，2，4}，{1，2，5}，{2，3，4}，{2，3，5}，{4，5，1}，{4，5，2}，{3，4，5}这8个子集合的；

在类型乙之下，A_i中那些三天的子集合是不能取{1,2,3}，{1，2，4}，{1，2，5}，{2，3，4}，{2，3，5}，{1，3，4}，{3，4，5}这7个子集合的；

在类型丙之下，A_i中那些三天的子集合是不能取{1,2,3}，{1，2，4}，{1，2，5}，{2，3，4}，{2，3，5}，{1，3，4}，{1，3，5}这7个子集合的；

在类型丁之下，A_i中那些三天的子集合是不能取{1,2,3}，{1，2，4}，{1，2，5}，{1，3，4}，{1，3，5}，{1，4，5}这6个子集合的．

因为不论在哪种类型下，A_i中那些三天的子集合至多只能在10－6＝4个子集合中取，这就导致了$q\leqslant 4$，因此$p\geqslant 7$这就与

原设$p\leqslant5$矛盾。因此必定有

$$p\geqslant6. \tag{19}$$

现在(18)式和(19)式是矛盾的；因为$p+q=11$。所以我们可知不可能对$M'=\{1, 2, 3, 4, 5\}$构造满足全面观摩要求的$A_1, A_2, \cdots A_{11}$、亦即$f(11)>5$。因此

$$f(11)=6.$$

澳大利亚1981年(第一届)数学竞赛题解

第一试

①**解**　我们将小于100的50个奇数1，3，5，…，49，51，53，…，97，99分成26个集合A_1，A_2，…，A_{25}，A_{26}。即定义

$$A_1=\{1\},$$

$A_2=\{3, 99\}$，$A_3=\{5, 97\}$，…，$A_i=\{2_i-1, 103-2_i\}$
…，$A_{25}=\{49, 53\}$，

$$A_{26}=\{51\}.$$

今若$B=\{b_i|b_i$为小于100的奇数，互不相同。$1\leqslant i\leqslant27\}$，那末我们要证明：$B$中至少有两个数，他们是落在同一个$A_i$ $(2\leqslant i\leqslant25)$之中的。因为如果在每一个$A_i$ $(2\leqslant i\leqslant25)$之中没有或者至多只有一个$B$中的数，那末

$$A_2\cup A_3\cup A_4\cup\cdots\cup A_{25}$$

中就至多只有B中的24个数，再因为A_1与A_{26}都只是含有一个数，这样

$$A_1\cup A_2\cup A_3\cup\cdots\cup A_{25}\cup A_{26}$$

中就至多只有B中的26个数。但

$$A_1\cup A_2\cup A_3\cup\cdots\cup A_{25}\cup_{26}\supset B;$$

故这与B中有27个数这一点相矛盾、这样我们就证得了B中有某两个数，它们落在同一个A_i（$2\leqslant i\leqslant 25$）之中。但因为每一个A_i（$2\leqslant i\leqslant 25$）中的两个数，其和都是102。所以我们就证得了（a）。

如 $C=\left\{c_i \middle| \begin{array}{l} c_i\text{为小于100的奇数，互不相同，}1\leqslant i\leqslant 26,\\ \text{而且其中任意两个之和不等于102.}\end{array}\right\}$

那么对每一个$2\leqslant i\leqslant 25$，$C\cap A_i$中，至多只能有一个数，因为否则就要与C中任意两个之和不等于102这一点相矛盾。这样

$$C\cap(A_2\cup A_3\cup\cdots\cup A_{25})$$

就至多有24个数、但因

$$C\subset A_1\cup A_2\cup A_3\cup\cdots\cup A_{25}\cup A_{26},$$

而且C中有26个数，所以一定有

$$\{1\}=A_1\subset C,\ 和\{51\}=A_{25}\subset C,$$

而且C与每一个A_i（$2\leqslant i\leqslant 25$）之交一定是一个数。所以要构造集合C，唯一不确定的是：在每一个A_i（$2\leqslant i\leqslant 25$）中，究竟选此A_i中的哪一个数作为C的成员。因此我们可以构造出

$$\underbrace{2\cdot 2\cdots\cdots 2}_{24个}=2^{24}$$

个像C这样的集合。这就回答了（b）的问题。

②**解**　我们先要证明一个基本的不等式，那就是在$0<\alpha<1$和x为实数时，

$$\left|\frac{x-\alpha^i}{x+\alpha^i}\right|\leqslant\begin{cases}\dfrac{1-\alpha^i}{1+\alpha^i}, & 在x\in[\alpha^{j+1},\alpha^j],但j<i;\\[2ex] \dfrac{1-\alpha^{j+1-i}}{1+\alpha^{j+1-i}}, & 在x\in[\alpha^{j+1},\alpha^j],但j\geqslant i.\end{cases}\tag{1}$$

我们现在证明之。我们先给出函数

$$f(x)=\frac{x-\alpha^i}{x+\alpha^i}$$

在$(-\infty, +\infty)$上的图形（见图一）。这实际上是一等边双曲线，因为

$$f(x)=1-\frac{2\alpha^i}{x+\alpha^i}$$

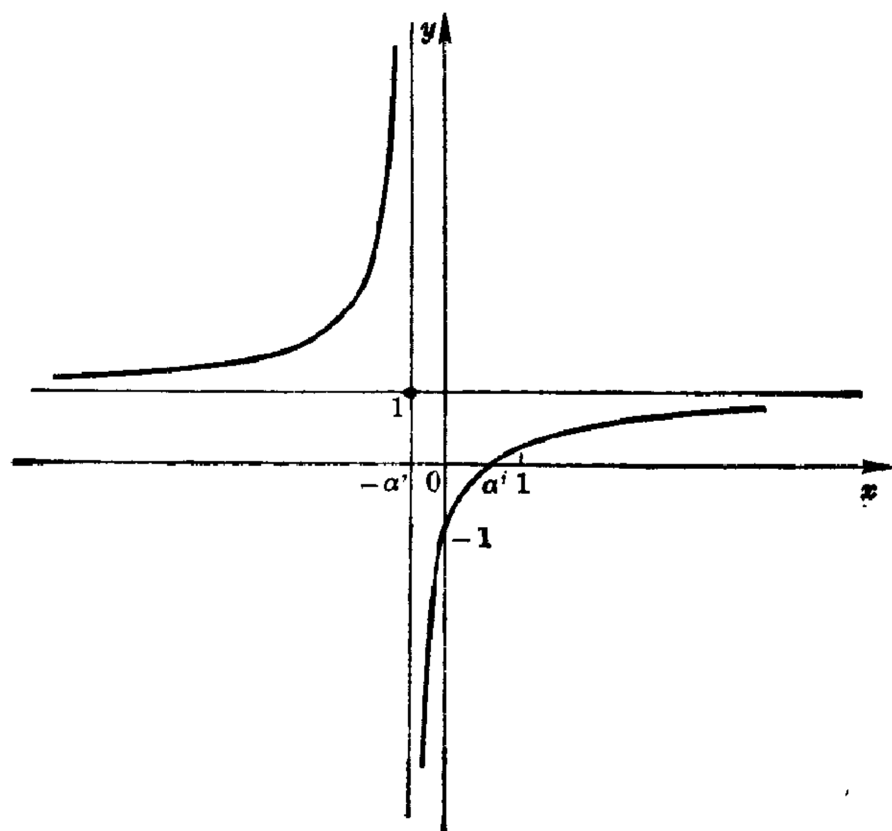
此函数在闭区间$[0,1]$上是单调增加的。再注意

$$f(\alpha^j)=0,$$

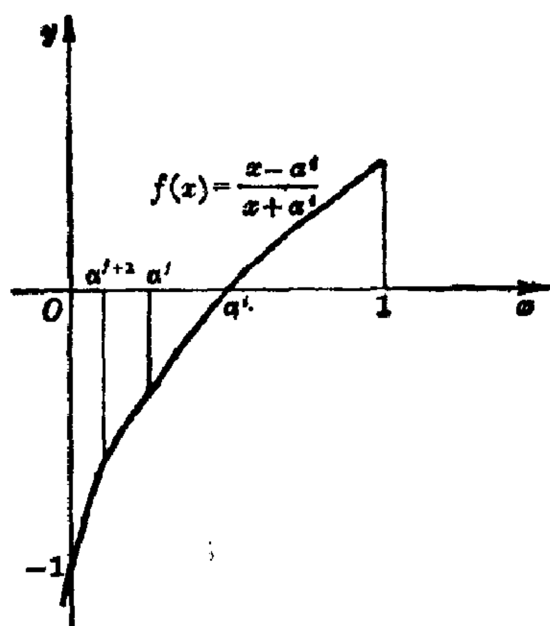
因此当$x\in[\alpha^{j+1}, \alpha^j]$时，

在$j<i$时　　$f(x)\geqslant 0$；

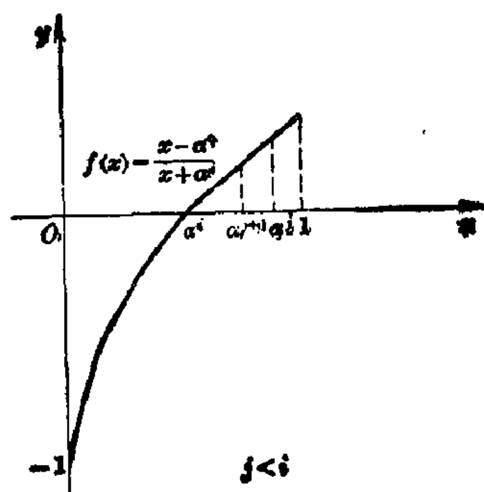
在$j>i$时　　$f(x)\leqslant 0$。



图一　　函数$f(x)=\dfrac{x-\alpha^i}{x+\alpha^i}$的图象



图二　$j\geqslant i$时的情况



图三　$j<i$时的情况

再因为　$j\geqslant i$时（见图二）

$$\frac{\alpha^{j+1}-\alpha^i}{\alpha^{j+1}+\alpha^i}=f(\alpha^{i+1})\leqslant f(x)\leqslant f(\alpha^j)=\frac{\alpha^j-\alpha^i}{\alpha^j+\alpha^i}<\frac{\alpha^i-\alpha^{j+1}}{\alpha^i+\alpha^{j+1}}.$$

即　$$|f(x)|\leqslant\left|\frac{\alpha^{j+1}-\alpha^i}{\alpha^{j+1}+\alpha^i}\right|=\frac{1-\alpha^{j+1-i}}{1+\alpha^{j+1-i}},$$

而在$j<i$时（见图三），

$$f(x)\leqslant f(1)=\frac{1-\alpha^i}{1+\alpha^i},$$

亦即　$$|f(x)|\leqslant\frac{1-\alpha i}{1+\alpha i}.$$

这就完成了不等式(1)的证明。

这样，为了证明本题中的不等式，我们将闭区间$[\alpha^{n+1},1]$分成$n+1$个互相邻接的小区间，即

$$[\alpha^{n+1},1]=[\alpha^{n+1},\alpha^n]\cup[\alpha^n,\alpha^{n-1}]\cup\cdots\cup[\alpha^2,\alpha]\cup[\alpha,1].$$

当$x\in[\alpha,1]$时，应用不等式(1)（$j=0$，$i>0$），得到

$$\left|\frac{x-\alpha}{x+\alpha}\right|\leqslant\frac{1-\alpha}{1+\alpha},\quad\left|\frac{x-\alpha^2}{x+\alpha^2}\right|\leqslant\frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2},\cdots\left|\frac{x-\alpha^n}{x+\alpha^n}\right|\leqslant\frac{1-\alpha^n}{1+\alpha^n},$$

因此$\left|\frac{(x-\alpha)}{(x+\alpha)}\cdot\frac{(x-\alpha^2)}{(x+\alpha^2)}\cdot\cdots\cdot\frac{(x-\alpha^n)}{(x+\alpha^n)}\right|\leqslant\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\cdot\frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}\cdot\cdots\cdot\frac{1-\alpha^n}{1+\alpha^n}$;

当$x\in[\alpha^2,\ \alpha]$时，应用不等式(1)($j=1$，$i\leqslant1$和$i>1$)，得到

$$\left|\frac{x-\alpha}{x+\alpha}\right|\leqslant\frac{1-\alpha}{1+\alpha},\quad\left|\frac{x-\alpha^2}{x+\alpha^2}\right|\leqslant\frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2},\quad\cdots,\quad\left|\frac{x-\alpha^n}{x+\alpha^n}\right|\leqslant\frac{1-\alpha^n}{1+\alpha^n},$$

因此$\left|\frac{(x-\alpha)}{(x+\alpha)}\cdot\frac{(x-\alpha^2)}{(x+\alpha^2)}\cdot\cdots\cdot\frac{(x-\alpha^n)}{(x+\alpha^n)}\right|\leqslant\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\cdot\frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}\cdot\cdots\cdot\frac{1-\alpha^n}{1+\alpha^n}$;

当$x\in[\alpha^3\alpha^2]$时，应用不等式(1)($j=2$，$i\leqslant2$和$i>2$)，得到

$$\left|\frac{x-\alpha}{x+\alpha}\right|\leqslant\frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2},\quad\left|\frac{x-\alpha^2}{x+\alpha^2}\right|\leqslant\frac{1-\alpha}{1+\alpha},\quad\left|\frac{x-\alpha^3}{x+\alpha^3}\right|\leqslant\frac{1-\alpha^3}{1+\alpha^3},$$

$$\cdots,\quad\left|\frac{x-\alpha^n}{x+\alpha^n}\right|\leqslant\frac{1-\alpha^n}{1+\alpha^n},$$

因此$\left|\frac{(x-\alpha)}{(x+\alpha)}\cdot\frac{(x-\alpha^2)}{(x+\alpha^2)}\cdot\cdots\cdot\frac{(x-\alpha^n)}{(x+\alpha^n)}\right|\leqslant\frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}\cdot\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\cdot\frac{1-\alpha^3}{1+\alpha^3}\cdot\cdots\cdot\frac{1-\alpha^n}{1+\alpha^n}=\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\cdot\frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}\cdot\frac{1-\alpha^3}{1+\alpha^3}\cdot\cdots\cdot\frac{1-\alpha^n}{1+\alpha^n}$;

一般在$x\in[\alpha^{j+1},\ \alpha^j]$时，其中$0\leqslant j\leqslant n$，应用不等式(1)，我们有

$$\left|\frac{x-\alpha}{x+\alpha}\right|\leqslant\frac{1-\alpha^j}{1+\alpha^j},\quad \left|\frac{x-\alpha^2}{x+\alpha^2}\right|\leqslant\frac{1-\alpha^{j-1}}{1+\alpha^{j-1}},\quad \cdots,\quad \left|\frac{x-\alpha^j}{x+\alpha^j}\right|$$

$$\leqslant\frac{1-\alpha}{1+\alpha},$$

$$\left|\frac{x-\alpha^{j+1}}{x+\alpha^{j+1}}\right|\leqslant\frac{1-\alpha^{j+1}}{1+\alpha^{j+1}},\quad \cdots,\quad \left|\frac{x-\alpha^n}{x+\alpha^n}\right|\leqslant\frac{1-\alpha^n}{1+\alpha^n}.$$

因此 $$\left|\frac{(x-\alpha)}{(x+\alpha)}\cdot\frac{(x-\alpha^2)}{(x+\alpha^2)}\cdot\cdots\cdot\frac{(x-\alpha^j)}{(x+\alpha^j)}\cdot\frac{(x-\alpha^{j+1})}{(x+\alpha^{j+1})}\cdot\cdots\cdot\right.$$

$$\left.\frac{(x-\alpha^n)}{(x+\alpha^n)}\right|\leqslant\frac{1-\alpha^j}{1+\alpha^j}\cdot\frac{1-\alpha^{j-1}}{1+\alpha^{j-1}}\cdot\cdots\cdot\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\cdot\frac{1-\alpha^{j+1}}{1+\alpha^{j+1}}$$

$$\cdot\cdots\cdot\frac{1-\alpha^n}{1+\alpha^n}=\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\cdot\frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}\cdot\cdots\cdot\frac{1-\alpha^j}{1+\alpha^j}\cdot\frac{1-\alpha^{j+1}}{1+\alpha^{j+1}}$$

$$\cdot\cdots\cdot\frac{1-\alpha^n}{1+\alpha^n}=p.$$

更有 $$\frac{(x-\alpha)}{(x+\alpha)}\cdot\frac{(x-\alpha^2)}{(x+\alpha^2)}\cdot\cdots\cdot\frac{(x-\alpha^n)}{(x+\alpha^n)}\leqslant p. \quad (2)$$

③**解** 我们设此等腰三角形的腰长为m，顶角$\angle BAC$之半为α（见图一），再设PQ与圆的切点为R，$\angle ROA=\theta$。我们约定当R点在AO的左侧时，θ为正；而当R点在AO右侧时，θ为负（在图一中的那种情况，θ为正）。这样

$$\frac{1}{2}BC=BO=m\sin\alpha,$$

$$PB=BP_0+PP_0,$$

$$BP_0=BO\sin\alpha=m\sin^2\alpha,$$

$$PP_0=OP_0\mathrm{tg}\left(\frac{90^\circ-\alpha-\theta}{2}\right)=BOC R\alpha\mathrm{tg}$$

$$\left(45^\circ-\frac{\alpha+\theta}{2}\right)=m\sin\alpha\cos\alpha\,\mathrm{tg}\left(45^\circ-\frac{\alpha+\theta}{2}\right).$$

图　一

同理　$$Q\theta_0=O\theta_0\,\mathrm{tg}\left(\frac{90^\circ+\theta-\alpha}{2}\right)=OP_0\,\mathrm{tg}\left(45^\circ-\frac{\alpha-\theta}{2}\right)$$

$$=m\sin\alpha\cos\alpha\,\mathrm{tg}\left(45^\circ-\frac{\alpha-\theta}{2}\right).$$

因此　$$BP\cdot QC=\left[m\sin^2\alpha+m\sin\alpha\cos\alpha\,\mathrm{tg}\left(45^\circ-\frac{\alpha+\theta}{2}\right)\right]\cdot$$

$$\left[m\sin^2\alpha+m\sin\alpha\cos\alpha\,\mathrm{tg}\left(45^\circ-\frac{\alpha-\theta}{2}\right)\right]$$

$$=m^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha\left[\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\left(45^\circ-\frac{\alpha+\theta}{2}\right)\right]\left[\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\left(45^\circ-\frac{\alpha-\theta}{2}\right)\right].$$

而　$$\left(\frac{BC}{2}\right)^2=m^2\sin^2\alpha$$

因此若　$$BP\cdot QC=\left(\frac{BC}{2}\right)^2,\qquad(1)$$

就是　$$m^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha\left[\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\left(45^\circ-\frac{\alpha+\theta}{2}\right)\right]\left[\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\left(45^\circ-\frac{\alpha-\theta}{2}\right)\right]=m^2\sin^2\alpha.$$

亦即　$$\left[\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\left(45^\circ-\frac{\alpha+\theta}{2}\right)\right]\left[\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\left(45^\circ-\frac{\alpha-\theta}{2}\right)\right]=1+\operatorname{tg}^2\alpha,$$

也即　$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\left(45^\circ-\frac{\alpha+\theta}{2}\right)+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\left(45^\circ-\frac{\alpha-\theta}{2}\right)+\operatorname{tg}\left(45^\circ-\frac{\alpha+\theta}{2}\right)\operatorname{tg}\left(45^\circ-\frac{\alpha-\theta}{2}\right)=1. \qquad (2)$$

若令　$$\beta=45^\circ-\frac{\alpha+\theta}{2},\qquad \gamma=45^\circ-\frac{\alpha-\theta}{2}, \qquad (3)$$

那么　$$\alpha+\beta+\gamma=\alpha+45^\circ-\frac{\alpha+\theta}{2}+45^\circ-\frac{\alpha-\theta}{2}=90^\circ$$

而当　$\alpha+\beta+\gamma=90^\circ$时，

$$\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}(90^\circ-\alpha-\beta)=\frac{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta},$$

亦即　$$\operatorname{tg}\gamma=\frac{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta},$$

此即　$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma=1. \qquad (4)$$

所以若将(3)式代入(4)式，那么就是(2)式，亦即(1)式成立。

其逆成立、亦即若(1)式成立，那么PQ一定与圆相切，为什么呢？因为若(1)式成立，那么

$$PB=\frac{\left(\frac{BC}{2}\right)^2}{QC}\geqslant\frac{\left(\frac{BC}{2}\right)^2}{AC}=CQ_0=BP_0,$$

所以P点一定在线段P_0A之内．这样BP一定可以写成

$$PB=m\sin^2\alpha+m\sin\alpha\cos\alpha\,\mathrm{tg}\left(45^\circ-\frac{\alpha+\theta}{2}\right)$$

的形式．余下只要证明

$$QC=m\sin^2\alpha+m\sin\alpha\cos\alpha\,\mathrm{tg}\left(45^\circ-\frac{\alpha-\theta}{2}\right),$$

那么PQ一定与圆相切，因为PB，QC满足（1）式，所以

$$QC=\frac{\left(\frac{BC}{2}\right)^2}{PB}$$

$$=\frac{m^2\sin^2\alpha}{m\sin^2\alpha+m\sin\alpha\cos\alpha\,\mathrm{tg}\left(45^\circ-\frac{\alpha+\theta}{2}\right)}$$

$$=\frac{m\,\mathrm{tg}\alpha}{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\left(45^\circ-\frac{\alpha+\theta}{2}\right)}$$

$$=m\sin\alpha\cos\alpha\left(\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\left(45^\circ-\frac{\alpha-\theta}{2}\right)\right)$$

$$=m\sin^2\alpha+m\sin\alpha\cos\alpha\,\mathrm{tg}\left(45^\circ-\frac{\alpha-\theta}{2}\right).$$

所以其逆成立

第　二　试

④解　设$M=1\times2\times3\times\cdots\times915+2\times3\times4\times\cdots\times916+\cdots$
$\cdots+1065\times1066\times1067\times\cdots\times1979+1066\times1067$
$\times1068\times\cdots\times1980$．

我们将M这一和分为两部份：第一部份M'为其前（$N-915$）项

之和，而M''为其后（$1981-N$）项之和，其中N是某一个大于或等于1066，但小于或等于1981的整数，即

$$1066 \leqslant N \leqslant 1981. \tag{1}$$

这样即有$M' = 1\times2\times3\times\cdots\times915+2\times3\times4\times\cdots\times916+\cdots$

$\cdots+(N-916)\times(N-915)\times\cdots\times(N-2)+(N-915)$

$\times(N-914)\times\cdots\times(N-1)$，

$M''=(N-914)\times(N-913)\times\cdots\times N+(N-913)\times$

$(N-912)\times\cdots\times(N+1)+\cdots+1066\times1067\times1068$

$\times\cdots\times1980$.

注意 $N-915 \leqslant 1066$

(利用(1)式的右半部)，因此上述分析总是可能的．再注意上述和式中的每一项是由915个整数相乘而得，而M''中共有($1981-N$) 项，但

$1981-N \leqslant 915$

(利用(1)式的左半部)，因此在M''中每一项一定都含有因子N，亦即

$M'' \equiv 0 \qquad \bmod N)$.

对M'而言，我们如果按N为模对其运算，即得

$M' \equiv 1\times2\times3\times\cdots\times915+2\times3\times4\times\cdots\times916+\cdots$

$+(-916)\times(-915)\times\cdots\times(-2)+(-915)$

$\times(-914)\times\cdots\times(-1)$

$=1\times2\times3\cdots\times915+2\times3\times4\times\cdots\times916+\cdots-916$

$\times915\times\cdots\times2-915\times914\times\cdots\times1=\widetilde{M}' \pmod N$，

这是因为M'中每一项都是由915个整数相乘而得，而915是一个奇数．因此在$\widetilde{M}'$中首尾对称的项可逐项相消，再因为M'中共有($N-915$) 项，而 ($N-915$) 是奇数或偶数要视N为偶数或奇数而定，当N为奇数时，($N-915$)是偶数，因此$\widetilde{M}'$中的所有

项全部相消，从而$M'=0$；而在N为偶数时，$(N-915)$是奇数，因此$\widetilde{M}'$中的所有首尾相对称的项全部消去后，还剩下中间的一项，此项的第一个因子是

$$\frac{1+(N-915)}{2}=\frac{N}{2}-457,$$

而此项的最后一个因子是

$$\frac{N}{2}-457+914=\frac{N}{2}+457,$$

因此此时 $\widetilde{M}'=\left(\frac{N}{2}-457\right)\times\left(\frac{N}{2}-456\right)\times\cdots\times\frac{N}{2}\times\cdots\times$

$$\left(\frac{N}{2}+456\right)\times\left(\frac{N}{2}+457\right).$$

因在 $\left(\frac{N}{2}-457\right)$，$\left(\frac{N}{2}-456\right)\cdots$，$\left(\frac{N}{2}-1\right)$，$\left(\frac{N}{2}+1\right)$，$\cdots$，

$\left(\frac{N}{2}+456\right)$，$\left(\frac{N}{2}+457\right)$，

这914个数中，一定有一个数包含因子2，再因为此时$\widetilde{M}'$中已有因子$\frac{N}{2}$，所以$\widetilde{M}'$一定包含因子N，亦即$\widetilde{M}'\equiv 0\ (\mathrm{mod}N)$综合上述，我们得到

$$M'\equiv\widetilde{M}'$$

$$=\begin{cases}0, & \text{当}N\text{为奇数,}\\ \left(\frac{N}{2}-457\right)\times\left(\frac{N}{2}-456\right)\times\cdots\times\frac{N}{2}\times\cdots\times\left(\frac{N}{2}+456\right) & \text{当}N\text{为偶数,}\end{cases}$$

$$\times\left(\frac{N}{2}+457\right),$$

$$\equiv 0,\ (\mathrm{mod}N).$$

这样　$M = M' + M'' \equiv 0 + 0 = 0 \pmod{N}$,

⑤**解**　我们称平面上这些等边三角形的顶点为节点。因此若A与B是节点，那么B点必定落在以A点为中心的六个角形区域的某一之内（见图一）. 因此（见图二）

$$AB = |m + ne^{i60°}|, \quad (1)$$

其中m, n是某两个非负整数. 因此若定义

$$D = \{AB \mid A, B\text{是平面节点}\},$$

那么由(1)式可知，若令D'为

$$D' = \{|m + ne^{i60°}| \mid m, n = 0, 1, 2, 3, \cdots\},$$

那么一定有　$D = D'$. 　(2)

现在我们再要证明集合D亦可表示为

$$D = \{|m + ne^{i60°}| \mid m = 0, \pm1, \pm2, \cdots, n = 0, 1, 2, \cdots\}.$$

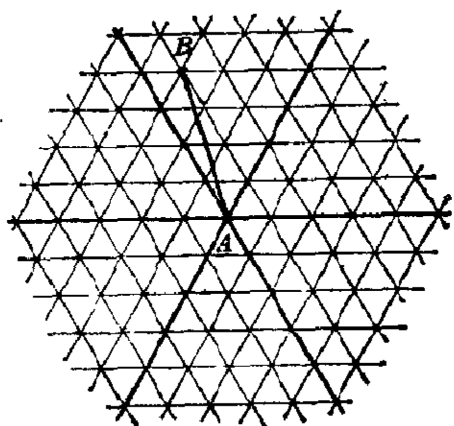


图1

这是因为若令

$$D'' = \{|m + ne^{i60°}| \mid m = 0, \pm1, \pm2, \cdots, n = 0, 1, 2, \cdots\},$$

则显然有$D' \subseteq D'' \subseteq D$,

但因$D' = D$, 故而$D'' = D$.

现在我们证明可乘性。即若$d_1 \in D$, $d_2 \in D$, 则要证明$d_1 \cdot d_2 \in D$.

这是因为由(2)式可知，一定有

$$d_1 = |m_1 + n_1 e^{i60°}|, \quad d_2 = |m_2 + n_2 e^{i60°}|,$$

其中m_1, n_1, m_2, n_2皆为非负整数，因此

$$d_1 d_2 = |m_1 + n_1 e^{i60°}| |m_2 + n_2 e^{i60°}|$$

$$= |m_1 m_2 + (n_1 m_2 + m_1 n_2) e^{i60°} + n_1 n_2 e^{i120°}|,$$

但因$1 + e^{i120°} = e^{i60°}$

(见图三)，因此

$$d_1 d_2 = |m_1 m_2 + (n_1 m_2 + m_1 n_2) e^{i60°} + n_1 n_2 (e^{i60°} - 1)|$$

$$= |m_1 m_2 - n_1 n_2 + (n_1 m_2 + m_1 n_2 + n_1 n_2) e^{i60°}| \quad (3)$$

因为$(m_1 m_2 - n_1 n_2)$是整数，$(n_1 m_2 + m_1 n_2 + n_1 n_2)$是非负整数，因此$d_1 d_2 \in D'' = D$。

这就证明了可乘性。

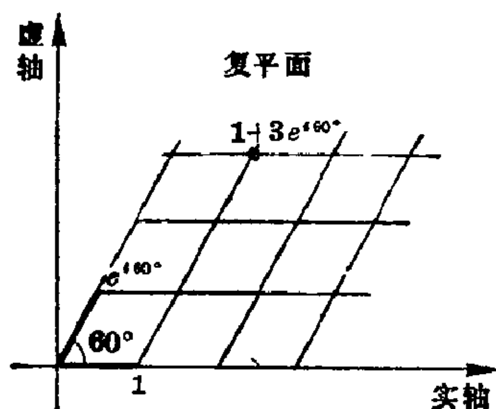


图　二

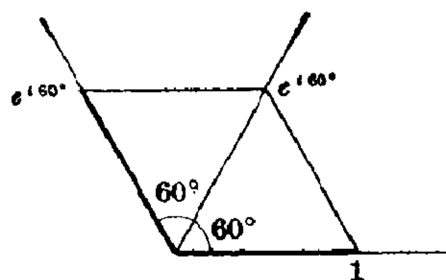


图　三

$$1 + e^{i120°} = 1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i = e^{i60°}$$

再因为$|m + n e^{i60°}| = \left|m + n\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)\right|$

$$= \left|\left(m + \frac{n}{2}\right) + \frac{\sqrt{3} n}{2} i\right|$$

$$= \sqrt{m^2 + mn + \frac{n^2}{4} + \frac{3n^2}{4}} = \sqrt{m^2 + mn + n^2}, \quad (4)$$

而　　$1981 = 283 \times 7$,

且　　$\sqrt{7} = \sqrt{2^2 + 2 \cdot 1 + 1^2}$,

$$\sqrt{283}=\sqrt{13^2+13\cdot 6+6^2},$$

因此　　$\sqrt{7}\in D.$　　　　$\sqrt{283}\in D.$

再由可乘性可知

$$\sqrt{1981}=\sqrt{7\cdot 283}=\sqrt{7}\cdot\sqrt{283}\in D.$$

因此　　$\sqrt{1981}\in D,$

示即$\sqrt{1981}$是平面上某两个节点之间的距离。

⑥**解**设弓箭手 B与C 分别在 X_B 和 X_C 处射箭，这当然有 $0\leqslant X_B\leqslant 1$，$0\leqslant X_C\leqslant 1$.我们用$P(Z)$ 表示发生事件Z的概率、我们先求$P(B$与C都射中目标$)$.

因为　$\{B$与C都射中目标$\}=\{B$射中目标$\}\cap\{C$射中目标$\}$．再因为B,C两弓箭手是独立行事的，彼此之间互不影响，这就可以假设事件$\{B$射中目标$\}$与事件$\{C$射中目标$\}$是随机独立的．因为对随机独立的事件之交，其概率为各事件概率之积，因此

$$P(B\text{与}C\text{都射中目标})=P(B\text{射中目标})\cdot P(C\text{射中目标}).$$

而据题意$P(B$射中目标$)=X_B^2$，$P(C$射中目标$)=X_C.$

因此　$P(B$与C都射中目标$)=X_B^2X_C.$

再因为$P(B$不射中目标$)=1-P(B$射中目标$)=1-X_B^2,$

$$P(C\text{不射中目标})=1-P(C\text{射中目标})=1-X_C.$$

因此我们可得表一中的结果.

往下我们来分析$\{$弓箭手 B 不输给弓箭手$C\}$的确切含意。根据题意，显然有

$\{$弓箭手B不输给弓箭手$C\}=\{$弓箭手B与C都射中目标，但$X_B\leqslant X_C\}$

$\cup\{B$射中目标但C不射中目标$\}\cup\{B$与C都不射中目标$\}$.

因为等式右端的三个事件是互相排斥的，因此这三事件之并的概率为各事件概率之和。但因

表一

B	C	联合情况
P(B射中目标) $=x_B{}^2$	P(C射中目标) $=x_c$	P(B与C都射中目标) $=x_B{}^2x_c$
P(B射中目标) $=x_B{}^2$	P(C不射中目标) $=1-x_c$	P(B射中但C不射中目标) $=x_B{}^2(1-x_c)$
P(B不射中目标) $=1-x_B{}^2$	P(C射中目标) $=x_c$	P(B不射中但C射中目标) $=(1-x_B{}^2)x_c$
P(B不射中目标) $=1-x_B{}^2$	P(C不射中目标) $=1-x_c$	P(B与C都不射中目标) $=(1-x_B^2)(1-x_c)$

P(弓箭手B与C都射中目标，但$X_B\leqslant X_C$)

$$=\begin{cases}X_B^2X_C, & 当X_B\leqslant X_C,\\ 0, & 当X_B>X_C.\end{cases}$$

因此再利用表一的结果可得到

$$P(B不输给C)$$

$$=\begin{cases}X_B^2X_C, & 当X_B\leqslant X_C,\\ 0, & 当X_B>X_C,\end{cases}+X_B^2(1-X_C)$$

$$+(1-X_B^2)(1-X_C)$$

$$=\begin{cases}X_B^2X_C, & 当X_B\leqslant X_C,\\ 0, & 当X_B>X_C,\end{cases}+(1-X_C)$$

$$=f(X_B,X_C),$$

即　P(B不输给C)是X_B和X_C的函数$f(X_BX_C)$．这样当X_B固定时，P(B不输给C)也是X_C的函数，我们要求出这个函数在$0\leqslant X_C\leqslant 1$上的平均值，显然这个平均值应该是

$$\frac{\int_0^1 f(x_B,x_C)\,dx_C}{1-0}=\int_0^1 f(x_B,x_C)\,dx_C$$

$$=\int_{x_B}^{1} x_B^2 x_C \mathrm{d}x_C + \int_{0}^{1}(1-x_C)\,\mathrm{d}x_C$$

$$=x_B^2\frac{1-x_B^2}{2}+\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{2}[1+x_B^2(1-x_B^2)]=g(x_B).$$

而弓箭手B的对策显然应该是选择x_B，使$g(x_B)$达到最大值.但因

$$g(x_B)=\frac{1}{2}(1+x_B^2-x_B^4)=\frac{1}{2}\left[\frac{5}{4}-\left(x_B^2-\frac{1}{2}\right)^2\right],$$

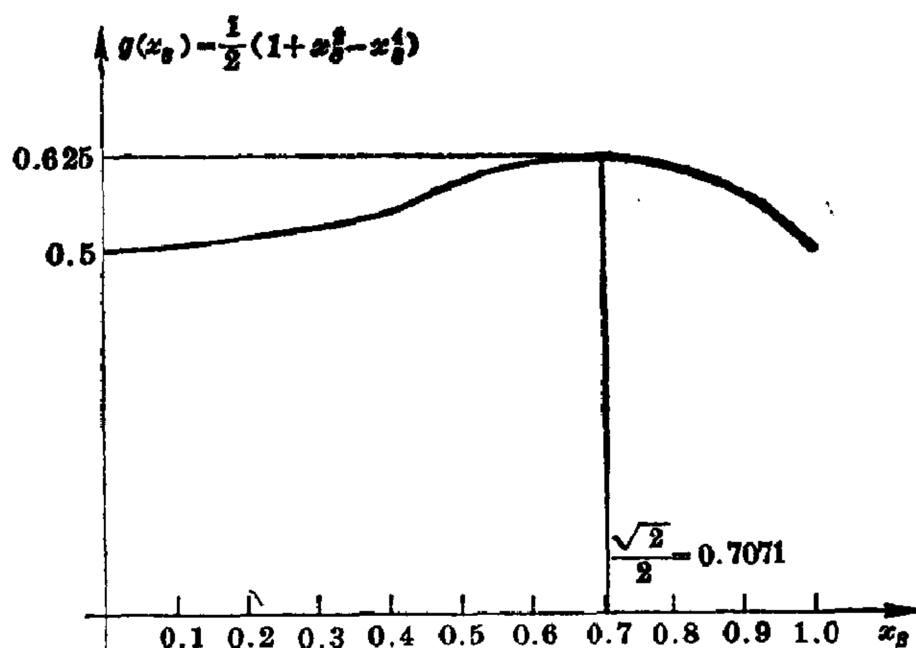
因此只有在$\left(x_B^2-\frac{1}{2}\right)=0$时，$g(x_B)$达到最大，亦即只有在

$$x_B=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}=0.7071\approx0.7$$

时 $$g(x_B)=\frac{5}{8}=62.5\%>50\%.$$

所以弓箭手B的最佳对策应该是：在走到0.7处射箭。在这种情况下，不管弓箭手C在何处射箭，B不输给C的概率平均值是62.5%。这还可以说是有相当把握不输掉呢！其原因就在于作了全局分析，从而得到最佳对策，以此来“弥补”技术上劣势。

在图一中绘出了函数$g(x_B)$的图象，同时在表二中给出该函数每隔0.1的值。



图一

表二

x_B	$g(x_B)=\frac{1}{2}(1+x_B^2-x_B^4)$	x_B	$g(x_B)=\frac{1}{2}(1+x_B^2-x_B^4)$
0	0.5	0.6	0.6152
0.1	0.5050	0.7	0.6250
0.2	0.5192	0.8	0.6152
0.3	0.5410	0.9	0.5770
0.4	0.5544	1.0	0.5
0.5	0.5938		

西德1981年数学竞赛题解

第一试

①**解** 我们先证充分性，因为

$$a\equiv 1(\mathrm{mod}10),\qquad n\equiv 1(\mathrm{mod}10),$$

所以 $S=a+a^2+\cdots\cdots+a^{n-1}+a^n$

$$\equiv 1+1+\cdots\cdots+1+1=n\equiv 1 \pmod{10},$$

因此 $$S\equiv 1 \pmod{10},$$

即S的个位数为1.

现在来证明必要性.因为

$$S=a+a^2+\cdots\cdots+a^{n-1}+a^n=\frac{a^{n+1}-a}{a-1},$$

若 $$S\equiv 1 \pmod{10},$$

亦即 $$\frac{a^{n+1}-a}{a-1}\equiv 1 \pmod{10},$$

则一定有 $a^{n+1}-a\equiv a-1 \pmod{10}$,

亦即 $$a^{n+1}\equiv 2a-1 \pmod{10} \tag{1}$$

因为 $$10=2\times 5,$$

而且2,5是互素的，所以(1)式就等价于

$$a^{n+1}\equiv 2a-1 \pmod{2}, \tag{2}$$

与 $$a^{n+1}\equiv 2a-1 \pmod{5}. \tag{3}$$

在(2)式中,我们进一步有

$$a^{n+1}\equiv 2a-1\equiv -1\equiv 1 \pmod{2}, \tag{4}$$

若$a\equiv 0 \pmod{2}$，那么$a^{n+1}\equiv 0 \pmod{2}$，这就与(4)式矛盾，所以只能有

$$a\equiv 1 \pmod{2}, \tag{5}$$

亦即a只能为奇数.

现在我们对(3)式进行讨论.首先注意下面的表一，注意该表中的数字都是指在mod5之下而言的.

所以结合(3)式与表一可知，若要(3)式成立，那末只可能是

$$a\equiv 1 \pmod{5} \tag{6}$$

或
$$\begin{cases} a\equiv 2 \pmod{5}, & (7)\\ n\equiv 2 \pmod{4}. & (8)\end{cases}$$

表一　　表中的运算都是对mod5而言的

a	$2a-1$	a^{n+1}
0	1	0
1	1	1
2	3	$2^1\equiv 2$，$2^2\equiv 4$，$2^3\equiv 3$，$2^4\equiv 1$；
3	0	$3^1\equiv 3$，$3^2\equiv 4$，$3^3\equiv 2$，$3^4\equiv 1$；
4	2	$4^1\equiv 4$，$4^2\equiv 1$.

这两种情况、

在(6)式成立之下，结合(5)式，便得

$$a\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,10)\text{、} \tag{9}$$

在(7)式与(8)式成立之下，结合(5)式，便得

$$\begin{cases} a\equiv 7\,(\mathrm{mod}\,10), & (10)\\ n\equiv (2\,\mathrm{mod}\,4). & (8)\end{cases}$$

但注意$7'\equiv 7\,(\mathrm{mod}\,10)$，$7^2\equiv 9\,(\mathrm{mod}\,10)$，$7^3\equiv 3\,(\mathrm{mod}\,10)$，$7^4\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,10)$，

因此　$7'\equiv 7\,(\mathrm{mod}\,10)$，　$7+7^2\equiv 6\,(\mathrm{mod}\,10)$，

$7+7^2+7^3\equiv 9\,(\mathrm{mod}\,10)$，　$7+7^2+7^3+7^4\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,10)$，

所以可知在(10)式与(8)式成立时

$$S=7+7^2+7^2(7+7^2+7^3+7^4)+\cdots\cdots+7^k(7+7^2+7^3+7^4)=6\,(\mathrm{mod}\,10).$$

可见(10)与(8)式不满足要求，但在(9)式成立时

$$S\equiv 1+1+\cdots\cdots+1+1=n.$$

因为　　$S\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,10)$.

所以　　$n\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,10)$.

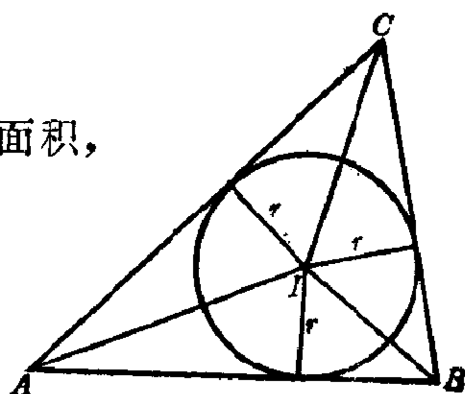
亦即必要性证得

②**解** 我们要指出GH是与边长为C的边平行的。我们现在来证明这一点、因为从内心I向边AB所作的垂线之长即为此三角形的内切圆半径r，因为从方程(见图一)

$$\frac{ar}{2}+\frac{br}{2}+\frac{cr}{2}=S=\triangle ABC\text{的面积},$$

若再记 $s=\frac{a+b+c}{2}$,

那么就有 $r=\frac{S}{s}$.



图一

另一方面，由重心G向AB所作的高为边AB上的高h_c的$\frac{1}{3}$.

这是因为(见图二)G是$\triangle ABC$三中线的交点，所以

$$GC'=\frac{1}{3}GC'、$$

再因为$CD \parallel GE$，所以

$$GE=\frac{CD}{3}=\frac{h_c}{3},$$

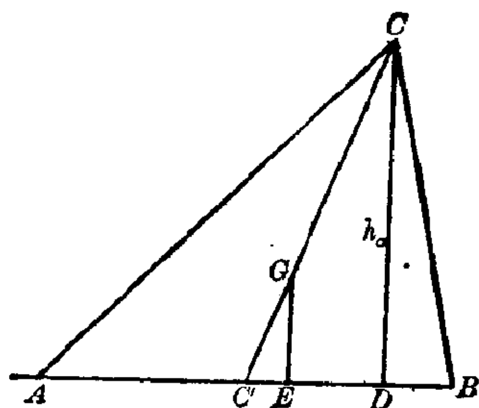
但注意 $\frac{ch_c}{2}=S$,

所以 $GE=\frac{2S}{3c}$,

要证明 $GE=r$,

就等价于 $\frac{2S}{3c}=\frac{S}{s}$,

亦即 $a+b+c=3c$,



图二

此即 $$c=\frac{a+b}{2}.$$

因此GI与边AB平行.

③**解** 本题与上海市1981年中学生数学竞赛复赛试题第2题相同，读者可参阅本书的相应解答.

④**解** 当$P=2$时，$2^2+3^2=13$，13显然不能表示为$n^k(k>1)$的形式，下面讨论$P>2$的情况.我们先证明

(i) $5|(2^p+3^p)$、这是因为对mod5而言，

$$2^p+3^p\equiv 2^p+(-2)^p=2^p-2^p=0\pmod 5,$$

所以$5|(2^p+3^p)$.进一步我们还有

(ii) $\frac{2^p+3^p}{5}\equiv P2^{p-1}\pmod 5$、那是因为

$$2^p+3^p=(2+3)(2^{p-1}-2^{p-2}\cdot 3+2^{p-3}\cdot 3^2-\cdots\cdots$$
$$-2\cdot 3^{p-2}+3^{p-1}),$$

因此 $$\frac{2^p+3^p}{5}\equiv 2^{p-1}+2^{p-2}\cdot 2+2^{p-3}\cdot(-2)^2-\cdots\cdots$$

$$-2\cdot(-2)^{p-2}+(-2)^{p-1}$$
$$=2^{p-1}+2^{p-1}+2^{p-1}+\cdots\cdots+2^{p-1}+2^{p-1}$$
$$=P2^{p-1}\pmod 5.$$

现在我们用反证法来证明本题，即如果

$$2^p+3^p=n^k,\qquad 其中k\geqslant 2.$$

那么因为 $5|(2^p+3^p)$，所以$5|n^k$，这样一定有

$$5|n,$$

所以 $$n=5m,$$

因此 $$2^p+3^p=5^km^k$$

因为$k\geqslant 2$，所以从$\frac{2^p+3^p}{5}=5^{k-1}m^k$，就得到

$$\frac{2^p+3^p}{5}\equiv 0\pmod 5.$$

但是从前述的(ii)便得

$$P2^{p-1}\equiv\frac{2^p+3^p}{5}\equiv 0\pmod 5,$$

因此 $$P2^{p-1}\equiv 0\pmod 5,$$

示即$P2^{p-1}$必定含有因子5，因此只有$P=5$.

但$P=5$时，$2^5+3^5=32+243=275=5^2\cdot 11$,

因为5与11是素数，而其方次分别是2与1，其最小公约数仍是1.所以$5^2\cdot 11$不能表示为n^k的形式，其中$k\geqslant 2$，因此2^5+3^5不能表示为n^k的形式，所以不论P为哪个素数，2^p+3^p始终不能表示为n^k，其中$k\geqslant 2$，的形式，这就与假设矛盾，本题得证

第二试

①**解** 我们可以定出a_1，使此数列的前100000项全是偶数，而第100001项为奇数，例如我们可以选

$$a_1=2^{100000}-2$$

因为此时 $$a_2=\left[\frac{3}{2}a_1\right]+1=3.2^{99999}-3+1=3.2^{99999}-2,$$

$$a_3=\left[\frac{3}{2}a_2\right]+1=3^2\cdot 2^{99998}-3+1$$

$$=3^2\cdot 2^{99998}-2,$$

$$\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots$$

$$a_{99999}=\left[\frac{3}{2}a_{99998}\right]+1=3^{99998}\cdot 2^2-3+1$$

$$=3^{99998}\cdot 2^2-2,$$

$$a_{100000}=\left(\frac{3}{2}a_{99999}\right)+1=3^{99999}\cdot 2-3+1$$

$$=3^{99999}\cdot 2-2,$$

$$a_{100001}=\left(\frac{3}{2}a_{100000}\right)+1=3^{100000}-3+1$$

$$=3^{100000}-2,$$

因此a_1，a_2，……，a_{99999}，a_{100000}全是偶数，而a_{100001}是奇数.

②**解** 设此平面为π，此平面π上的那个一一映射记为$f(x)$，其逆映射记为$f^{-1}(x)$，显然它也是一个平面π上的一一映射，我们往下要逐步证明：

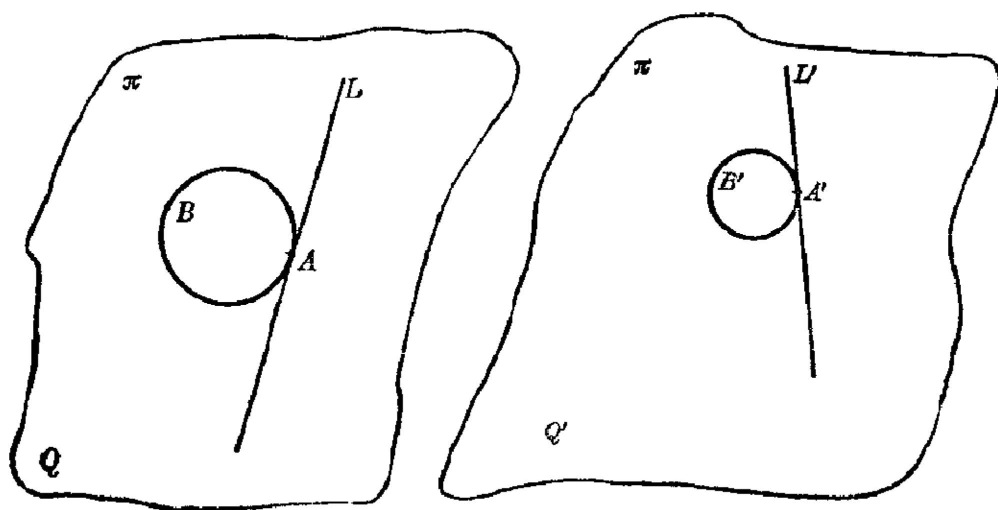
(i) 设平面π上有一点A，$f(A)=A'$，那末一定有

f（过A点的一条直线L）$\supseteq$过A'点的某条直线L'，

这是因为我们若过A点作一圆B，使B'和L相切，（见图一），由假设可知，圆B一定被f映射为另一个圆B'，亦即

$$f(B)=B'.$$

因为$f(A)=A'$，所以圆B'一定过A'点，过A'点作圆B'的切线L'，我们就是要证明



图一

$$f(L)\supseteq L'.$$

因为我们把平面π上除直线L以外的部份记为Q，直线L'以外的部份记为Q'，这就有

$$L\cap Q'=\text{空集合},\qquad \pi=L\cup Q,$$
$$L'\cap Q=\text{空集合},\qquad \pi=L'\cup Q'.$$

因为平面π上Q中的每一点，若不是B上的点，此点记为C，那么一定可以作一圆D，使D过A，C两点，而且与圆B相切，因为f将圆映射为圆，若记$f(D)=D'$，那么D'一定是一圆，而且此圆过A'，亦一定与圆B'相切，因圆B与圆D只有一个交点，所以圆B'与圆D'亦只能有一个交点，因此圆D'与圆B'相切于A'.再记$f(C)=C'$，那么C'一定在圆D'上(见图二)，也就是C'一定在Q'内，所以

$$f(Q)\subseteq Q'.$$

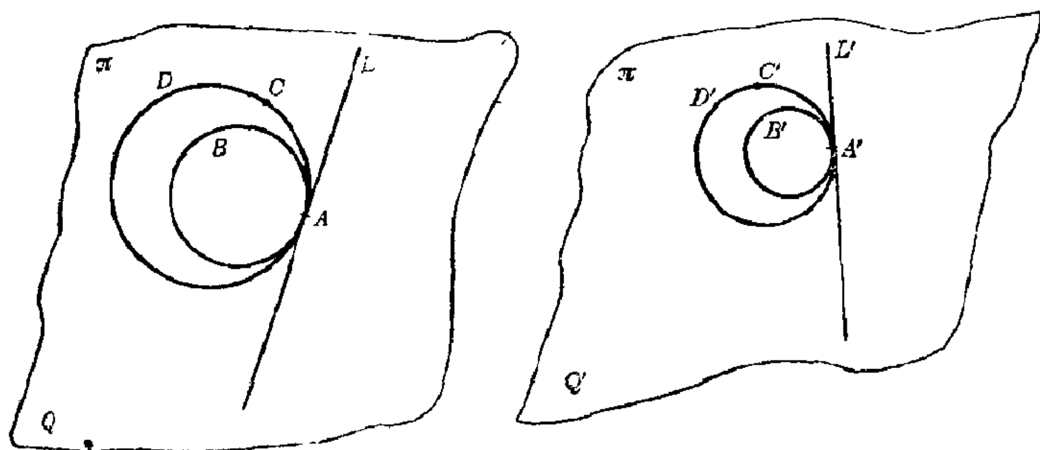
因为 $\qquad \pi=f(Q)\cup f(L)$,

而且 $\qquad f(Q)\cap f(L)=\text{空集合}$,

所以 $\qquad f(L)\supseteq L'$,

这也就是f(过A点的一条直线L)$\supseteq$过A'点的某条直线L'

(ii) 我们要证明：f^{-1}亦是将圆映射为圆的.设平面上有



图二

一圆E'，其上有三点H'_1、H'_2、H'_3。设

$$H_1=f^{-1}(H'_1),\ H_2=f^{-1}(H'_2),H_3=f^{-1}(H'_3).$$

我们首先证明：一定可以选择H'_1、H'_2、H'_3，使H_1，H_2，H_3三点是不会共线的。因为否则的话，对圆E'上的任意三点H'_1、H'_2、H'_3，一定有H_1，H_2，H_3共线。固定H'_1、H'_2。由H_1，H_2确定的直线记为M。这样，也就是$f^{-1}(E')\subseteq M$，从而有$E'\subseteq f(M)$，但由(i)知$f(M)\subseteq$某直线，因此有

$$E'\subseteq f(M)\subseteq\text{某直线},$$

这样$E'\subseteq$某直线，

但因直线决不能包含圆，所以导致矛盾。故而一定存在圆E'上的三点，H'_1、H'_2、H'_3，使H_1、H_2、H_3三点不共线、这样过H_1、H_2，H_3三点可以确定一个圆E.（见图三）我们要证明$f^{-1}(E')=E$。这是因为$f(E)$一定是一个圆，而且此圆过H'_1、H'_2、H'_3三点。所以此圆一定是E'，所以$f(E)=E'$，也就是 $$E=f^{-1}(E').$$

所以f^{-1}一定将圆映射为圆。

(iii) 现在我们证明

$$f(\text{直线})=\text{直线}.$$

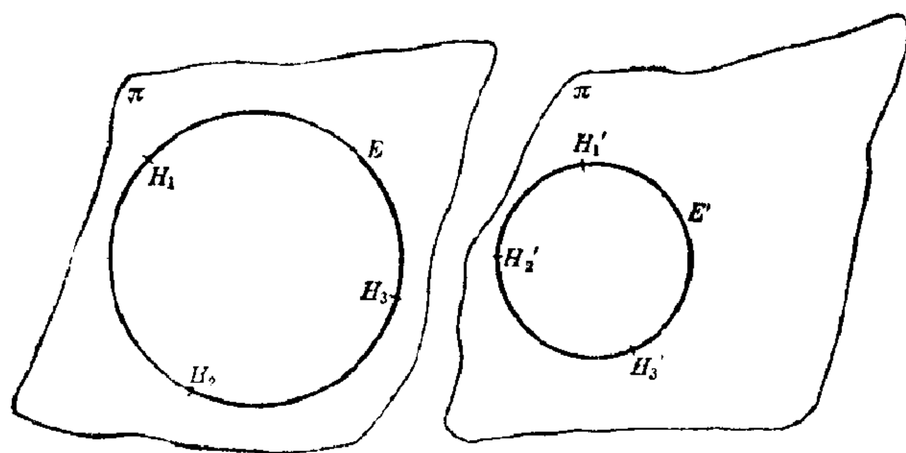


图 3

设平面π上有一条直线L。由(i)知$f(L)$一定包含一条直线L'_1，亦即

$$f(L)\supseteq L'. \qquad (1)$$

再因为由(ii)可知，f^{-1}亦是一个平面π上的一一映射，而且亦是把圆映射为圆，所以同样有

$$f^{-1}(L)\supseteq L, \qquad (2)$$

这也是　　$L'\supseteq f(L)$，

这样结合(1)式与(2)式，便得

$$f(L)\supseteq L'\supseteq f(L),$$

亦即　　　　$f(L)=L'$.

也就是　　　　f(直线)=直线。

③**解**　$k=1$是无意义的，所以我们只要从$k=2$开始讨论起，那就是说在$n=2^{2-1}=2^1=2$时，我们总可以从$2n-1=2\cdot 2-1=3$个自然数中选出2个自然数，使其和被2除尽。我们现在先来证明这一点。我们先将这3个数以2为模，考察其所属的剩余类(亦即区分其是偶数还是奇数)。因为这3个数中至少有2个同是奇数或者同是偶数。设此2个数为x_1，x_2。若x_1，x_2皆为偶数，那么

$$x_1\equiv 0\pmod 2, \qquad x_2\equiv 0\pmod 2,$$

当然有$x_1+x_2\equiv 0\pmod 2$，

亦即x_1+x_2可被2除尽。如果x_1，x_2皆为奇的，那么

$$x_1\equiv 1\pmod 2, \qquad x_2\equiv 1\pmod 2,$$

因此有　　　$x_1+x_2\equiv 1+1\equiv 0\pmod 2$,

亦即x_1+x_2亦可被2除尽。所以证明了$k=2$的情况。为了证明$k=4$的情况，我们需要一个建立在$k=2$基础上的一个引理。那就是

引理一　如果有5个奇数或是5个偶数，那么一定可以从

这 5 个数中选出 4 个，使其和被 4 除尽。

证明　若这5个数是偶数，我们设这5个数为x_i，$1\leqslant i\leqslant 5$，从而有

$$x_i = 2y_i, \qquad 1\leqslant i\leqslant 5,$$

其中y_i是自然数。从$y_1\cdots$，y_5中任选 3 个，其中必有 2 个，其和被 2 除尽。不失一般性可设此二数为y_1，y_2。再从y_3，y_4，y_5这 3 个数中一定可以选出 2 个数，不失一般性可设为y_3，y_4，其和亦被 2 除尽。这样

$$y_1 + y_2 \equiv 0 \pmod 2, \qquad y_3 + y_4 \equiv 0 \pmod 2$$

所以　$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \equiv 0 \pmod 2$.

从而　$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) \equiv 0 \pmod 4$,

亦即x_1，x_2，x_3，x_4。这 4 个数，其和可被 4 除尽。

当 5 个数是奇数时，我们有

$$x_i = 2y_i - 1, \qquad 1\leqslant i\leqslant 5,$$

其中y_i是自然数、相仿於前述的方法，可得

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \equiv 0 \pmod 2,$$

这样　$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) - 4 \equiv 0 \pmod 4$,

亦即x_1，x_2，x_3，x_4这 4 个数，其和可被 4 除尽。

现在来证明$k = 3$的情况，此时

$$n = 2^{3-1} = 4, \qquad 2n - 1 = 7$$

我们将原来的 7 个数考察其奇、偶性。因为此 7 个数中至少有 2 个数，可设为x_1，x_2，其奇、偶性是相同的，这样

$$x_1 + x_2 \equiv 0 \pmod 2.$$

再在x_3，x_4，…，x_7中，也至少有 2 个数，可设为x_3，x_4，其奇、偶性是相同的，这样

$$x_3 + x_4 \equiv 0 \pmod 2.$$

而在x_5，x_6，x_7这 3 个数中，我们总可选择 2 个数，设为x_5，

x_6，使x_5+x_6被 2 除尽，亦即

$$x_5+x_6\equiv 0(\mathrm{mod}\,2).$$

因为在mod2之下为 0 的剩余类，在mod4之下只可能 0 或2、因此有

$$x_1+x_2\equiv\begin{cases}0,\\2,\end{cases}(\mathrm{mod}\,4),\qquad x_3+x_4\equiv 0\begin{cases}0,\\2,\end{cases}(\mathrm{mod}\,4),$$

$$x_5+x_6\equiv\begin{cases}0,\\2,\end{cases}(\mathrm{mod}\,4).$$

若x_1+x_2与x_3+x_4在mod 4之下同为0或2，这样就有

$$x_1+x_2+x_3+x_4\equiv 0+0\equiv 0(\mathrm{mod}\,4)$$

或 $$x_1+x_2+x_3+x_4\equiv 2+2\equiv 0(\mathrm{mod}\,4),$$

这时就取x_1，x_2，x_3，x_4为所要求的数。

若x_1+x_2与x_3+x_4在mod 4之下一为0，另一为2，不失一般性可设

$$x_1+x_2\equiv 0(\mathrm{mod}\,4),\qquad x_3+x_4\equiv 2(\mathrm{mod}\,4),$$

而若 $$x_5+x_6\equiv 0(\mathrm{mod}\,4),$$

那么 $$x_1+x_2+x_5-x_6\equiv 0(\mathrm{mod}\,4),$$

这时取x_1，x_2，x_5，x_6为所求的数；而若

$$x_5+x_6\equiv 2(\mathrm{mod}\,4),$$

那么 $$x_3+x_4+x_5+x_6\equiv 2+2\equiv 0(\mathrm{mod}\,4),$$

这时取x_3，x_4，x_5，x_6为所求的数、这样就证明了$k=3$的情况。

利用$k=3$的情形以及前面所建立的引理一，我们可以证明$k=4$的情形、注意在$k=4$时

$$n=2^{4-1}=8,\qquad 2n-1=15.$$

我们将原来15个数考察其奇、偶性。因为至少有 5 个数，其奇偶性是相同的，据引理一可知必定可从这 5 个数中选出 4 个

数，其和被4除尽、不失一般性，可设此4个数是x_1,x_2,x_3,x_4。这样

$$x_1+x_2+x_3+x_4\equiv 0\pmod 4).$$

再因为在$x_5,\cdots,x_{15}$这11个数中，也至少有5个数，其奇、偶性是相同的，因此再据引理一可知，必定可从这5个数中选出4个数，其和被4除尽。设此4个数为x_5，x_6，x_7，x_8。这样

$$x_5+x_6+x_7+x_8\equiv 0\pmod 4$$

而剩下的x_9，$x_{10},\cdots x_{15}$这7个数中，利用$k=3$的情况，必定可选出4个数，不失一般性可设为x_9，x_{10}，x_{11}，x_{12}这4个，使

$$x_9+x_{10}+x_{11}+x_{12}\equiv 0\pmod 4$$

所以若$x_1+x_2+x_3+x_4$与$x_5+x_6+x_7+x_8$在mod8之下同是0或4，那就有

$$\sum_{i=1}^{8} x_i\equiv 0\pmod 8.$$

若一为0，另一为4，可设

$$x_1+x_2+x_3+x_4\equiv 0\pmod 8,$$

$$x_5+x_6+x_7+x_8\equiv 4\pmod 8.$$

而若 $x_9+x_{10}+x_{11}+x_{12}\equiv 0\pmod 8$，

那么取$x_1,\cdots,x_4$，x_9，x_{10}，x_{11}，x_{12}为所求之数；若

$$x_9+x_{10}+x_{11}+x_{12}\equiv 4\pmod 8,$$

那么取$x_5,\cdots,x_8$，x_9，x_{10}，x_{11}，x_{12}为所求之数。这样就证得了$k=4$的情形

现在来证明一般的情况。

设命题在$\leqslant k+1$（$k\geqslant 2$）时都成立。因此命题在k时当然成立、在此基础上我们就要证明引理二。即

引理二　在2^k-1+2^{k-1}个奇数或$2^{k-1}+2^k-1$个偶数中，总可选出2^k个数，使其和被2^k除尽，其中k为自然数。

证明　记这$2^{k-1}+2^k-1$个数为x_i，$1\leqslant i\leqslant 2^{k-1}+2^k-1$。若这些数都是偶数，那么

$$x_i=2y_i,\qquad 1\leqslant i\leqslant 2^{k-1}+2^k-1.$$

在这些y_i中取2^k-1个，那么因为本题的命题在k时成立，所以一定可以从此2^k-1个数中选出2^{k-1}个，使其和被2^{k-1}除尽。可设这2^{k-1}个数是前2^{k-1}个，这样

$$\sum_{i=1}^{2^{k-1}} y_i\equiv 0(\mathrm{mod}\,2^{k-1}),$$

因而
$$\sum_{i=1}^{2^{k-1}} x_i=2\sum_{i=1}^{2^{k-1}} y_i\equiv 0(\mathrm{mod}\,2^k).$$

而剩下来的$y_{2^{k-1}+1}$，…，$y_{2^{k-1}+2^k-1}$这2^k-1个数中，再一次使用本题原命题k时情形，从而再可从其中选出2^{k-1}个数，不妨设是$y_{2^{k-1}+1},\cdots,y_{2^k}$，使

$$\sum_{i=2^{k-1}+1}^{2^k} y_i\equiv 0(\mathrm{mod}\,2^{k-1}).$$

从而
$$\sum_{i=2^{k-1}+1}^{2^k} x_i=2\sum_{i=2^{k-1}+1}^{2^k} y_i\equiv 0(\mathrm{mod}\,2^k).$$

这样合起来便有

$$\sum_{i=1}^{2^k} x_i\equiv 0(\mathrm{mod}\,2^k).$$

在原来的x_i都为奇数时，方法雷同，只是注意

$$x_i = 2y_i - 1, \qquad 1 \leqslant i \leqslant 2^k + 2^{k-1} - 1$$

$$\sum_{i=1}^{2^{k-1}} x_i = 2\sum_{i=1}^{2^{k-1}} y_i - 2^{k-1} \equiv -2^{k-1} (\mathrm{mod}\, 2^k),$$

$$\sum_{i=2^{k-1}+1}^{2^k} x_i = 2 \sum_{i=2^{k-1}+1}^{2^k} y_i - 2^{k-1} \equiv -2^{k-1}$$

$(\mathrm{mod}\, 2^k)$,

从而 $$\sum_{i=1}^{2^k} x_i \equiv -2^{k-1} - 2^{k-1} = -2^k \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 2^k).$$

现在来证明本题命题在$k+2$时成立，亦就是证明在$2^{k+2}-1$个自然数中一定可以选出2^{k+1}个数，使其和被2^{k+1}除尽。

我们先考察这$2^{k+2}-1$个数的奇偶性，因为这$2^{k+2}-1$个数中至少有2^{k+1}个数都是奇数或都是偶数，这是因为若奇数的个数$\leqslant 2^{k+1}-1$，偶数的个数$\leqslant 2^{k+1}-1$，那么总共至多只能有

$$2^{k+1} - 1 + 2^{k+1} - 1 = 2^{k+2} - 2 < 2^{k+2} - 1;$$

因而与原设矛盾、再因为

$$2^{k+1} > 2^k + 2^{k-1} - 1,$$

因此运用引理二，便知必定可以选出2^k个数，使其和被2^k除尽。设此2^k个数为$x_1, \cdots, x_{2^k}$。那么余下的是$2^{k+2}-2^k-1$个数。再因为其中至少有$2^{k+1}-2^{k-1}$个数都是奇数或者都是偶数。这是因为若奇数的个数$\leqslant 2^{k+1}-2^{k-1}-1$偶数的个数$\leqslant 2^{k+1}-2^{k-1}-1$，那么总共至多只能有

$$(2^{k+1} - 2^{k-1} - 1) \times 2 = 2^{k+2} - 2^k - 2 < 2^{k+2} - 2^k - 1,$$

因而矛盾、再因为

$$2^{k+1} - 2^{k-1} > 2^k + 2^{k-1} - 1,$$

所以从这$2^{k+1}-2^{k-1}$个奇数，或者是$2^{k+1}-2^{k-1}$个偶数中，再一

次运用引理二，又可选出2^k个数，使其和被2^k除尽，设这2^k个数为$x_{2^k+1},\cdots,x_{2^{k+1}}$.从而余下的便是$x_{2^{k+1}+1},\cdots,x_{2^{k+2}-1}$这$2^{k+2}-1-2^{k+1}=2^{k+1}-1$个数、运用本题命题在$k+1$时情形，便可知道可从其中选出$2^k$个数，设为$x_{2^{k+1}+1},\cdots,x_{2^{k+1}+2^k}$，使其和被$2^k$除尽. 总结上述，便得

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{2^k} x_i\equiv 0(\mathrm{mod}2^k),\\ \sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} x_i\equiv 0(\mathrm{mod}2^k),\\ \sum_{i=2^{k+1}+1}^{2^{k+1}+2^k} x_i\equiv 0(\mathrm{mod}2^k).\end{cases}$$

从而
$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{2^k} x_i\equiv \begin{cases}0,\\2^k,\end{cases}(\mathrm{mod}2^{k+1}),\\ \sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} x_i\equiv \begin{cases}0,\\2^k,\end{cases}(\mathrm{mod}2^{k+1}),\\ \sum_{i=2^{k+1}+1}^{2^{k+1}+2^k}\equiv \begin{cases}0,\\2^k,\end{cases}(\mathrm{mod}2^{k+1}).\end{cases}$$

若$\sum_{i=1}^{2^k} x_i$与$\sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}}$在$\mathrm{mod}2^{k+1}$之下同是0或同是2^k，那么

$$\sum_{i=1}^{2^{k+1}} x_i\equiv\begin{cases}0+0\\2^k+2^k\end{cases}\equiv 0(\mathrm{mod}2^{k+1}),$$

从而$x_1,\cdots,x_{2^k}$，$x_{2^k+1}\cdots x_{2^{k+1}}$便是所求的$2^{k+1}$个数。

若$\sum_{i=1}^{2^k}x_i$与$\sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}}x_i$在$\mathrm{mod}\,2^{k+1}$之下一是0，另一是$2^k$，那末可设前者是0，后者是$2^k$，亦即

$$\sum_{i=1}^{2^k}x_i\equiv 0(\mathrm{mod}\,2^{k+1}),$$

$$\sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}}x_i\equiv 2^k(\mathrm{mod}\,2^{k+1}).$$

如果 $$\sum_{i=2^{k+1}+1}^{2^{k+1}+2^k}x_i\equiv 0(\mathrm{mod}\,2^{k+1}),$$

那么$x_1,\cdots,x_{2^k}$，$x_{2^{k+1}+1},\cdots,x_{2^{k+1}+2^k}$便是所求的$2^{k+1}$个数；

如果 $$\sum_{i=2^{k+1}+1}^{2^{k+1}+2^k}x_i\equiv 2^k(\mathrm{mod}\,2^{k+1}),$$

那末$x_{2^k+1},\cdots$，$x_{2^{k+1}}$，$x_{2^{k+1}+1},\cdots$，$x_{2^{k+1}+2^k}$便是所求。

这样便证得本题命题於$(k+2)$时成立。

④**解** 我们先证明

(i) $1\in M$.这是因为对任何自然数$m\geqslant 2$，

因此 $$m>[\sqrt{m}]$$

所以若 $m\in M$，但$m\neq 1$，那么因为$[\sqrt{m}]\in M$，但$[\sqrt{m}]$比m小、若$[\sqrt{m}]\neq 1$，那么再对$[\sqrt{m}]$重复以上的过程.因为m是一个有限的自然数，必定在经过有限次以上的过程后有$m'\in M$，$[\sqrt{m'}]=1$，因为$[\sqrt{m'}]\in M$，所以$1\in M$。

(ii) 对任何自然数r，$2^r \in M$，这是因为$1 \in M$，故$4 \in M$，因此$[\sqrt{4}] = 2 \in M$，因为$4 = 2^2$，所以

由$1 \in M$，得到$2^2 \in M$，$2^4 \in M$，$2^6 \in M$，……，$2^{2k} \in M$，……；

由$2 \in M$，得到$2^3 \in M$，$2^5 \in M$，$2^7 \in M$，……$2^{2n+1} \in M$，……，因此综合以上两种情况使得

$2^r \in M$，　　其中r是任何自然数

(iii) 总存在一个自然数r，使

$$2^r \in [n^{2^k}, \ (n+1)^{2^k}), \tag{1}$$

其中n是一个固定的自然数，k是一个充分大的自然数.

我们先注意到 (1) 式意味着

$$n^{2^k} \leqslant 2^r < (n+1)^{2^k},$$

亦即
$$\frac{\lg n^{2^k}}{\lg 2} \leqslant r < \frac{\lg (n+1)^{2^k}}{\lg 2}, \tag{2}$$

为证明 (2) 式成立，我们只要证明

$$\frac{\lg (n+1)^{2^k}}{\lg 2} - \frac{\lg n^{2^k}}{\lg 2} \geqslant 1, \tag{3}$$

则就知在 $\left(\frac{\lg n^{2^k}}{\lg 2}, \frac{\lg (n+1)^{2^k}}{\lg 2}\right)$

内存在一个自然数r，而(3)式就是

$$\lg\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2^k} \geqslant \lg 2,$$

亦即是 $$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2^k} \geqslant 2,$$

此即 $$2^k \geqslant \frac{\lg 2}{\lg\left(1+\frac{1}{n}\right)}, \tag{4}$$

注意在(4)式中，因为n是固定的，因此右端是一个定值，所以我们总可以取充分大的k使(4)式满足，这样(3)式也就成立，所以(1)式成立。

现在我们证明对任何自然数n，必定有$n\in M$，这是由(ii)可知，对任何自然数r，$2^r\in M$、再由(iii)可知，对上述的固定n，可以取到充分大的k，使存在某个自然数r，有

$$2^r \in \left[n^{2^k},\ (n+1)^{2^k}\right)$$

因为$2^r\in M$，所以也就是说

$$M \cap \left[n^{2^k},\ (n+1)^{2^k}\right)\text{不是空集合。}$$

再因为对 $$x \in \left(n^{2^k},\ (n+1)^{2^k}\right),$$

$$n^{2^{k-1}} \leqslant \sqrt{x} < (n+1)^{2^{k-1}},$$

所以 $$n^{2^{k-1}} \leqslant \left[\sqrt{x}\right] < (n+1)^{2^{k-1}},$$

因此 $$M \cap \left[n^{2^{k-1}},\ (n+1)^{2^{k-1}}\right)\text{不是空集合。}$$

逐次进行以上的推理，最后便得到$M\cap[n^2, (n+1)^2)$不是空集合，这也就是说：存在$x\in M$，

$$n^2 \leqslant x < (n+1)^2.$$

因此 $$n \leqslant \sqrt{x} < (n+1),$$

所以 $$n = [\sqrt{x}] \in M.$$

比利时1981年（第六届）数学竞赛题解

①**解法一** 注意多项式x^2+x+1的根，即二次方程

$$x^2+x+1=0 \tag{1}$$

的根为 $x_1=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$，$x_2=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$.

从(1)可知 $x_j+1=-x_j^2$，$(j=1,2)$。 (2)

如果设 $f(x)=(x+1)^{2n+1}+x^{n+2}$，

那么对$j=1.2$，我们都有

$$\begin{aligned}
f(x_j)&=(x_j+1)^{2n+1}+x_j^{n+2}\\
&=(-x_j^2)^{2n+1}+x_j^{n+2}\\
&=-x_j^{4n+2}+x_j^{n+2}\\
&=x_j^{n+2}(1-x_j^{3n})\\
&=x_j^{n+2}\left[1-(x_j^3)^n\right]\\
&=x_j^{n+2}(1-x_j^3)(1+x_j^3+x_j^6+\cdots+x_j^{3n-3})\\
&=x_j^{n+2}(1-x_j)(1+x_j+x_j^2)\\
&\quad(1+x_j^3+x_j^6+\cdots+x_j^{3n-3})=0
\end{aligned}$$

因为$f(x)$是x的$2n+1$次多项式，因此一定有

$$f(x)=(x-x_1)(x-x_2)g(x),$$

其中$g(x)$是一个$2n-1$次多项式。所以

$$f(x)=(x^2+x+1)g(x),$$

亦即多项式$f(x)$可以被x^2+x+1除尽。

解法二 我们用数学归纳法来证明．注意当$n=1$时，

$$(x+1)^3+x^3=2x^3+3x^2+3x+1$$
$$=(x^2+x+1)(2x+1),$$

即命题在$n=1$时为真．

再设命题在$n-1$时为真，即多项式

$$(x+1)^{2n-1}+x^{n+1}$$

可以被 x^2+x+1除尽。注意

$$(x+1)^{2n+1}+x^{n+2}=(x+1)^{2n-1}(x+1)^2+x^{n+2}$$
$$=(x+1)^{2n-1}(x^2+x+1+x)$$
$$+x^{n+2}$$
$$=(x+1)^{2n-1}(x^2+x+1)$$
$$+x(x+1)^{2n-1}+x^{n+2}$$
$$=(x+1)^{2n-1}(x^2+x+1)+x$$
$$[(x+1)^{2n-1}+x^{n+1}],$$

上式中最后一个式子中的第二部份据归纳法假设知可被x^2+x+1除尽，这样连同第一部份，可知其和，即$(x+1)^{2n+1}+x^{n+2}$，可被x^2+x+1除尽。

②**解** 我们称那个能够覆盖半径为R、圆心角为α的扇形的最小的圆为*最小覆盖圆*．为求出最小覆盖圆的半径r，我们逐步讨论之。

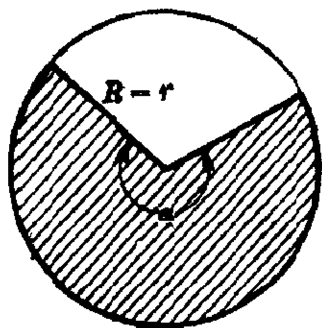
1）当$\alpha\geqslant\pi$时，$r=R$。*即最小覆盖圆就是原扇形的圆*（见图一）。

我们称一个几何图形中任意两点之间距离的最大值为该图形的直径．显然，当$\alpha\geqslant\pi$时，扇形的直径为$2R$，但因为最小覆盖圆是覆盖（即包含）这个扇形的，所以它的直径$2r$一定有$2r\geqslant 2R$，即

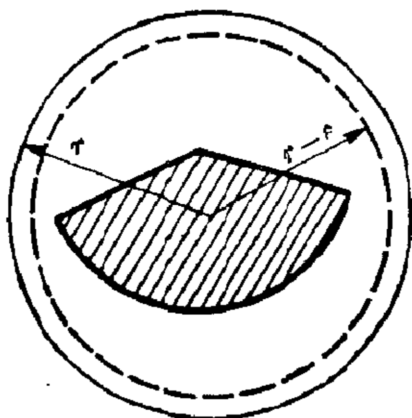
$$r\geqslant R. \tag{1}$$

所以R是r可能取值中最小的一个值，所以取原扇形的那个圆，它显然是可以覆盖扇形的，而且据（1）式，它也是最小的覆盖圆。因此

$$r = R, \quad (当\alpha \geqslant \pi 时)。 \tag{2}$$



图一



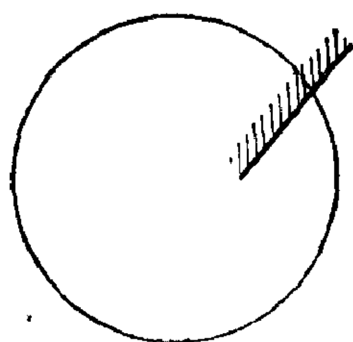
图二

2）我们称扇形中半径与圆周的交点，为腰角点。那末我们要证明：当 $\alpha < \pi$ 时，最小覆盖圆的圆周一定要通过扇形的两个腰角点。我们分几步来证明这一点。

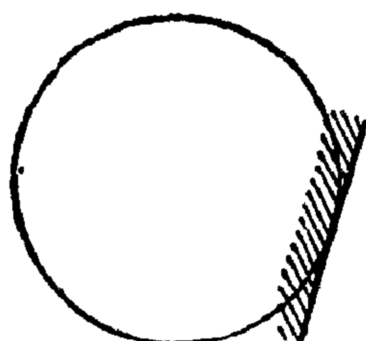
甲。最小覆盖圆的圆周一定要与扇形的周界有交点。若不是这样，那末一定可以以最小覆盖圆的圆心为圆心，以$(r-\varepsilon)$为半径，使得这个新作的圆仍然覆盖扇形，其中ε是一个可以取到的适当的正数、（见图二）。这样就与最小覆盖圆的"最小"性相矛盾，因此最小覆盖圆的圆周一定与扇形的周界有交点。

乙。我们称扇形边界上半径部份（不包括腰角点与圆心）为开半径、我们要证明：最小覆盖圆与开半径不能有交点。这是因为如果是有交点，那末这就相当於有一条直线段穿过圆周，而使圆只覆盖这直线段的某一侧。这在直线段与圆周是相交（见图三）或是相切（见图四）时都是办不到的，因此我们的结论成立。

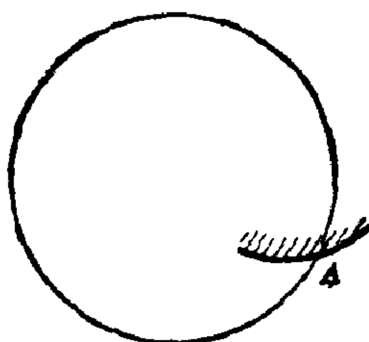
丙。我们称扇形边界上的圆周部份（不包括腰角点）为开圆



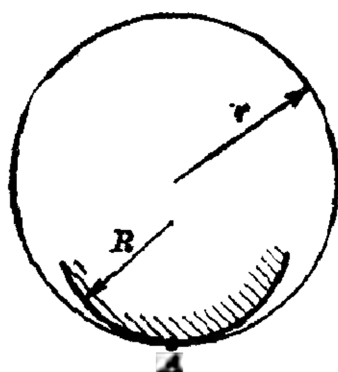
图三



图四

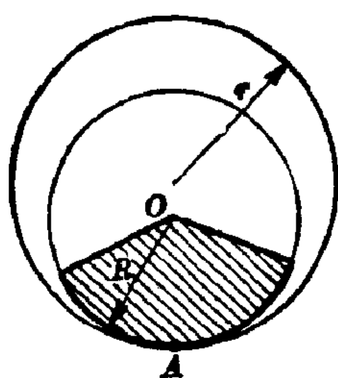


图五

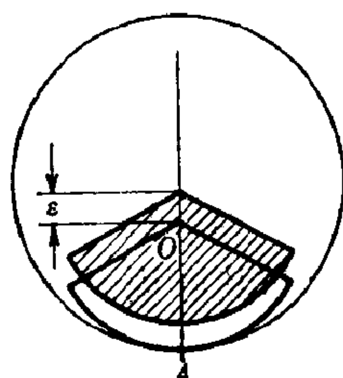


图六

弧．我们要证明：当$\alpha<\pi$时最小覆盖圆的圆周与开圆弧不能有交点．若有一交点A，那末在这一点的附近，开圆弧与最小覆盖圆的圆周或者是相交(见图五)，或者是相切(见图六)、因为这两个圆，其一是要覆盖另一的，因此相交是不可能的，而在相切情况之下，套在外边的圆一定是最小覆盖圆，而在里边的圆是扇形的圆．因此一定有$r\geqslant R$．因此最小覆盖圆不仅是覆盖了扇形，而且也覆盖了产生这扇形的整个圆(见图七)．我们将此扇形绕其圆心(设为O)作适当的旋转而使OA为此扇形的对称轴．这样我们可将扇形沿AO方向平移一段距离ε，而使此扇形仍在最小覆盖圆之内，而且与最小覆盖圆的圆周无交点(见图八)．因为$\alpha<\pi$，上述的那个正数ε总是可以取到的．这样与前面讨论的甲产生了矛盾，所以可知最小覆盖圆与开圆弧



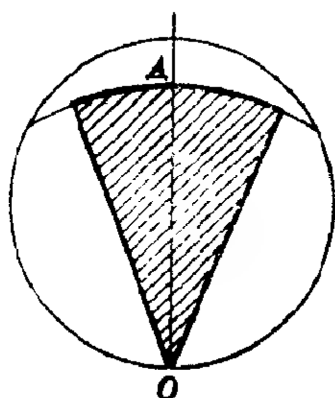
图七



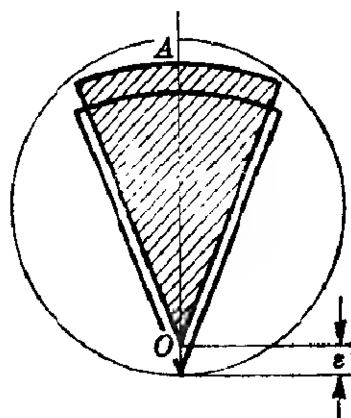
图八

不能有交点。

丁、在$\alpha<\pi$时若扇形的圆心在最小覆盖圆的圆周上，那末此扇形的两个腰角点亦一定都在此最小覆盖圆的圆周上、若这两个腰角点有一不在最小覆盖圆的圆周上，那末我们总可以将此扇形绕其原圆心O作适当的旋转，使此扇形的对称轴OA成为最小覆盖圆的直径．当然此时扇形的两个腰角点一定都不在最小覆盖圆的圆周上(见图九)．这样我们就可将扇形沿OA方向平移一段距离ε，使得整个扇形都在最小覆盖圆之内，而与最小覆盖圆的圆周无交点(见图十)而．这与前面讨论的甲又产生了矛盾．所以我们的结论成立。



图九



图十

戊、在 $\alpha<\pi$ 时若扇形的一个腰角点在最小覆盖圆的圆周上，那末另一腰角点亦一定在此圆周上，若另一腰角点不在此圆周上，那末此时扇形的圆心O亦一定不在此圆周上（见图十一）. 因为否则要与前面的结论丁产生矛盾，这样我们可以将扇形绕圆心O转过一个适当的角度而使整个扇形落在最小覆盖圆之内而与其圆周无交点（见图十二）. 这样又与前述的结论甲产生矛盾。所以本结论成立。

这样，综合上述可知，在 $\alpha<\pi$时最小覆盖圆的圆周必定要和扇形的周界有交点（由结论甲），但这些交点只能是扇形的圆心和两个腰角点（由结论乙和丙），而且两个腰角点必定是交点。因为若某一腰角点不是交点，那末由结论戊可知另一腰角点亦不是交点，那末再由结论丁可知此时扇形的圆心亦一定不是交点，这样扇形和最小覆盖圆又没有交点了，而这与结论甲是矛盾的。

这样我们便可知道在$\alpha<\pi$时，最小覆盖圆的圆心必定在扇形中连接两个腰角点的弦的垂直平分线上，进一步我们有：

3) 当$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$时，最小覆盖圆的圆心即在扇形中连接两个腰角点的弦的中点处，半径为此弦之半（见图十三）.

因为由前面的讨论可知，（从图十三上来看）最小覆盖圆的圆心必定在直线DO上，而此圆一定要过，B、C两点，因此一定有$r\geqslant BD$. 所以如果以D为圆心以BD为半径的圆确能覆盖此扇形，那末此圆就是最小覆盖圆了. 而这在$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ 时是确是如此的. 这是因为

$$BD=R\sin\frac{\alpha}{2},\ OD=R\cos\frac{\alpha}{2},\ DA=R\left(1-\cos\frac{\alpha}{2}\right).\quad(3)$$

我们只要证明

$$DA<BD, \tag{4}$$

$$OD<BD, \tag{5}$$

就够了．而（4）式即为

$$R\left(1-\cos\frac{\alpha}{2}\right)<R\sin\frac{\alpha}{2},$$

即

$$1<\sqrt{2}\,Sin\ \left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right). \tag{6}$$

因为$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，故 $\frac{\pi}{2}<\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)<\frac{3}{4}\pi$，因此$\sqrt{\frac{1}{2}}<Sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$，因此(6)式成立，亦即(4)式成立．

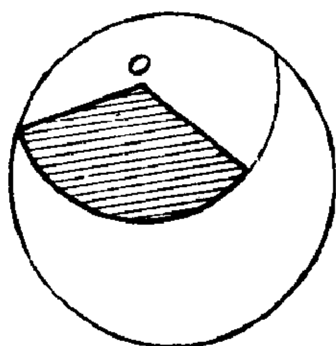
而(5)式即为

$$R\cos\frac{\alpha}{2}<R\sin\frac{\alpha}{2},$$

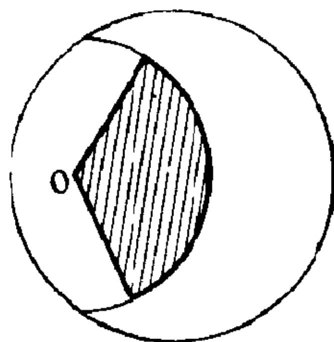
即

$$0<\sqrt{2}\,\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right). \tag{7}$$

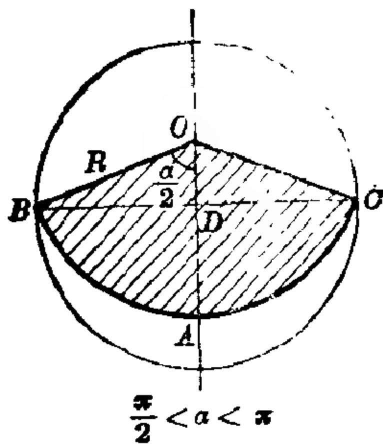
因为$0<\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right)<\frac{\pi}{4}$，因此（7）式成立，亦即（5）式成立．



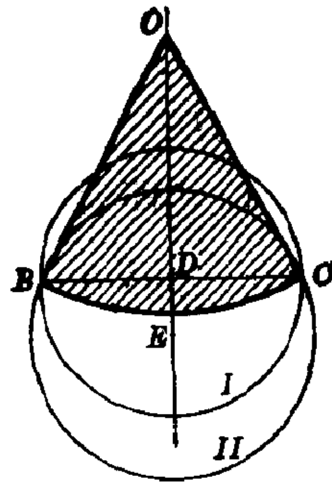
图十一



图十二



图十三



图十四

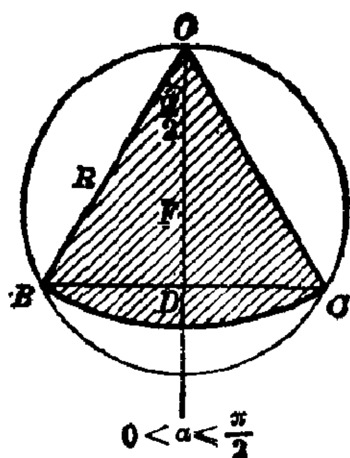
所以结论3)成立。

4) 当$0<\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$时，最小覆盖圆即为扇形中由圆心以及两个腰角点所组成的三角形的外接圆。(见图十五)

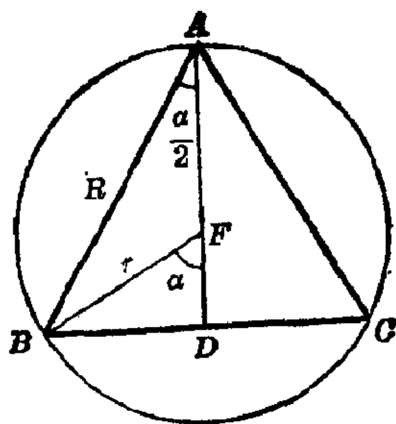
因为由前所述，在$0<\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$时(从图十四上来看)最小覆盖圆的圆心不能再在$D$点，因为以$D$为圆心，以$DB$为半径的圆Ⅰ不再覆盖原扇形。而且若圆心由$D$朝$OD$方向选取时，也是不行的，因为这时所作的圆对原扇形的覆盖部份越来越少(见图十四中由E为圆心，以BE为半径的圆Ⅱ)。因此圆心只能由D朝DO方向选取，直至所作圆正好通过O点为至。这样所作圆就是过O，B，C三点的$\triangle OBC$的外接圆。(其圆心为F，见图十五)如果圆沿FO方向继续向上而不超过O点那么所作圆虽说是覆盖原扇形的，但半径越来越大。因此结论4)成立。

至于此外接圆半径r的具体表达式可从图十六上求得。因为

$$BD=R\sin\frac{\alpha}{2},$$



图十五



图十六

所以 $$r = BF = \frac{BD}{\sin\alpha} = \frac{R\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha} = \frac{R}{2\cos\frac{\alpha}{2}}. \quad (8)$$

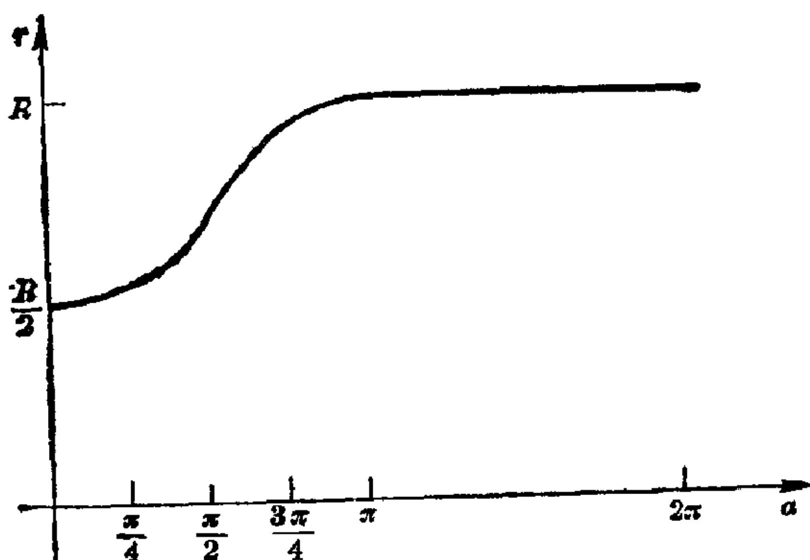
这样我们就得到了r (R, α) 的具体表达式（见(2)，(3)，(8)各式）：

$$r(R,2) = \begin{cases} \dfrac{R}{2\cos\frac{\alpha}{2}}, & \text{当} 0<\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}, \\ R\sin\frac{\alpha}{2}, & \text{当} \frac{\pi}{2}<\alpha<\pi, \\ R, & \text{当} \pi\leqslant\alpha\leqslant 2\pi. \end{cases} \quad (9)$$

固定R，函数$r = r(\alpha)$的图形见图十七。

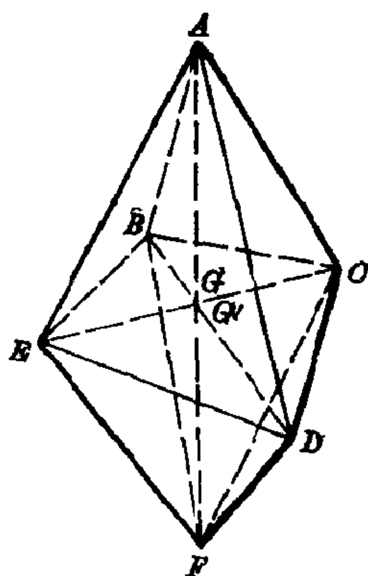
③**解** 直线AF，BD和CE恒有一公共的交点。现证明之。

直线AF因为既在平面$ACFE$中，又在平面$ABFD$中，因此它是这两个平面的交线．设此直线与平面$BCDE$的交点为G（见图一）．再设直线EC和BO的交点为G'，今证G'即G，这是因为G'当然在平面$BCDE$上，而又因为G'在EC上，所以G'当然在



图十七

平面$ACFE$上。而G'又在BD上，所以G'亦在平面$ABFD$上。这样G'就在平面$ABFD$和$ACFE$的交线AF上，因此G'即是AF与平面$BCDE$的交点，即G'为G。



图一

④**解**　本题的答案是：赌徒A赢的可能性大。具体说来是：赌徒A赢的概率是0.6；而赌徒B赢的概率是0.4；赌徒A与B两人不分胜负（即谁也不赢，谁也不输）的概率是0。

我们用两种方法解之。第一种解法要用到一些概率论的知识。而第二种解法要用到线性代数的知识。

解法一　我们用P(事件Z)表示发生事件Z的概率，在本题中，我们所讨论的事件就是小孩每次掷钱币后的结果是正、是反所组成的序列。(当能定出胜负时是有一个有限序列，而当始终未能定出胜负时是一个无限序列)。即在本题中，所有事件的集合(称为样本空间，或者论题)就是每项或者是H或者是T所组

成的有限或无限序列的全体. 那末出现怎样的事件时，就算赌徒A赢了呢？那就是出现了THT，但在以前始终没有出现过TTT（当然也没有出现过THT）. 同样，如果出现了TTT，而以前始终没有出现过THT，（当然也没有出现过TTT），那末就算赌徒B赢了. 例如在下列事件$TTHHTHT$中，A就赢了. 因为小孩掷满三次以后，出现了TTH；再掷第四次后，出现了THH；……一直到小孩第七次掷币后，才出现THT，而以前一直未出现过TTT，同样在事件$HTHHHTTT$中，赌徒B赢了. 注意，可能出现一些事件，在这种事件下，赌徒A和B是决定不了胜负的，如出现事件

$$HTHHTH\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

那末这就是一例. （始终循环出现HTH）

现在我们记事件的集合

$X=\{$由T和H组成的序列$|$先出现THT，TTT不出现或以后出现$\}$.

这里我们用记号$\{\ \ |\ \ \}$表示一个集合，此集合中的元素所满足的条件由竖线$|$以后的内容加以说明. 这样赌徒A赢的概率即为

$$x=P(X),$$

我们把集合X中的事件分为两类，一类是U，另一类是V，即

$U=\{X$中的元素，但第1项为$H\}$,

$V=\{X$中的元素，但第1项为$T\}$.

再记 $u=P(U)$, $v=P(V)$.

因为 $X=U\cup V$,

但 $U\cap V=\phi$[注]

〔注〕 ϕ表示空集合

故 $$x=u+v. \tag{1}$$

我们再把U中的元素分成两类：U_1和U_2，即

$U_1=\{X$中的元素，但形式为$HT\cdots\cdots\}$，

$U_2=\{X$中的元素，但形式为$HH\cdots\cdots\}$。

即我们把U中的元素再按第二次掷币后的结果再加以分类。同样，因为

$$U=U_1\cup U_2, \qquad U_1\cap U_2=\phi,$$

若记 $u_1=P(U_1)$， $u_2=P(U_2)$

那末 $$u=u_1+u_2. \tag{2}$$

因为在U中的元素第一项皆是H，所以不管在第二、第三项上出现什么，由第一、第二、第三这三项所组成的三元组一定不会是THT或者TTT。所以要判断一次事件是否属于U，只要从第二项开始算计起，这样

$U_1=\{$小孩第一次掷币出现$H\}\cap U_1'$，

其中 $U_1'=\{$小孩第二次掷币出现T，往后是THT比TTT先出现$\}$，

$U_2=\{$小孩第一次掷币出现$H\}\cap U_2'$，

其中 $U_2'=\{$小孩第二次掷币出现H，往后是THT比TTT先出现$\}$。

注意 $U_1'=V$， $U_2'=U$。

这是因为在U_1'和V中的序列只是在称呼上有些区别，而在实质内容上是一样的。对U_2'和U亦是如此，因此若记

$$u_1'=P(U_1'), \qquad u_2'=P(U_2'),$$

那末 $u_1'=v$， $v_2'=u$。

再因为小孩各次掷币是相互独立的，即事件$\{$小孩第一次掷币出现$H\}$与事件U_1'是相互独立的。因为对两个相互独立的事件，其交的概率为其分别两个事件的概率的乘积。因此得到

$$P(U_1)=P(\{小孩第一次掷币出现H\})\cdot P(U_1')。$$

但因为 $P(\{小孩第一次掷币出现H\})=\frac{1}{2}$，

所以 $u_1=\frac{1}{2}\cdot u_1'=\frac{v}{2}$。 (3)

同理， $u_2=\frac{1}{2}\cdot u_2'=\frac{u}{2}$。 (4)

这样结合(2)，(3)，(4)三式，得到 (5)

$$u=v。$$

用完全类似的方法，对集合 v 进行分析，可以得到关于 u，v 的另一个关系式。具体说来是，因为 V 中的序列第一项都是 T，所以不能再像前面那样，仅仅是按第二项出现 T 或 H 而对 V 中的序列分类，而是我们将 V 中的序列分成下列互不相容的四类：

$$V_1=\{X中的元素，但形式为THT\cdots\cdots\}，$$
$$V_2=\{X中的元素，但形式为THH\cdots\cdots\}，$$
$$V_3=\{X中的元素，但形式为TTHT\cdots\cdots\}，$$
$$V_4=\{X中的元素，但形式为TTHH\cdots\cdots\}。$$

因为对 V 中的元素，绝对不会出现 $TTT\cdots\cdots$ 的形式，所以我们有 $V=V_1UV_2UV_3V_4$。

若再记 $Ui=P(Vi)$， $i=1，2，3，4$，

那么就有 $U=U_1+U_2+U_3+U_4$ (6)

因为对 V_1 中的序列来说，开始的一、二、三项就出现了 THT，所以从第四项以及往后各项来说就可以随便是 H 或 F。所以再利用第一、第二、第三次掷币的随机独立性，便得

$$U_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}。 \quad (7)$$

同理可得 $$U_3=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{16}. \tag{8}$$

而 $V_2=\{$小孩第一次掷币出现T，但第二次掷币出现$H\}\cap V_2'$，

此处 $V_2'=\{$小孩第三次掷币出现H，往后是THT比TTT先出现$\}$；

$V_4=\{$小孩第一次、第二次、第三次掷币分别出现T、T、$H\}\cap V_4'$，

此处 $V_4'=\{$小孩第四次掷币出现H，往后是THT比TTT先出现$\}$.

同以前一样，我们有

$$V_2'=U, \qquad V_4'=U$$

再利用相互独立的随机事件其交的概率为其各概率之积，可得到

$$U_2=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot u=\frac{u}{4}, \tag{9}$$

$$U_4=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot u=\frac{u}{8}. \tag{10}$$

这样综合(6)，(7)，(8)，(9)，(10)五式，就得到

$$U-\frac{3u}{8}=\frac{3}{16}. \tag{11}$$

这样联立(11)、(5)两式，就得到关于u_1v的二元线性方程组：

$$\begin{cases} U=u, \\ U-\dfrac{3u}{8}=\dfrac{3}{16}. \end{cases}$$

解之得 $$\begin{cases} u=0.3, \\ v=0.3 \end{cases} \tag{12}$$

故从(1)得 $x=0.3+0.3=0.6.$ (13)

现在可按同样的方法求得事件的集合

$Y=\{$由T和H组成的序列 | 先出现TTT，THT不出现或以后出现$\}$的概率

$$y=P(Y).$$

我们这里只扼要列出一些算式。原理同上。

记 $S=\{Y$中的元素，但第1项为$H\}$，

$Q=\{Y$中的元素，但第1项为$T\}$，

$S_1=\{Y$中的元素，但形式为$HT\cdots\cdots\}$，

$S_2=\{Y$中的元素，但形式为$HH\cdots\cdots\}$，

$Q_1=\{Y$中的元素，但形式为$TTT\cdots\cdots\}$，

$Q_2=\{Y$中的元素，但形式为$TTHH\cdots\cdots\}$，

$Q_3=\{Y$中的元素，但形式为$THH\cdots\cdots\}$.

再记 $S=P(S)$, $q=P(Q)$,

$Si=P(S_i)$, $i=1, 2$,

$q_i=P(Q_i)$, $i=1, 2, 3$, (14)

则有 $y=S+q$

$$S=S_1+S_2=\frac{q}{2}+\frac{S}{2}, \tag{15}$$

$$q=q_1+q_2+q_3+q_4$$

$$=\frac{1}{8}+\frac{S}{8}+\frac{S}{4}=\frac{1}{8}+\frac{3S}{8}. \tag{16}$$

联立(15)，(16)两式就得到关于q，s的两元线性方程组

$$\begin{cases} S=q, \\ q=\dfrac{1}{8}+\dfrac{3S}{8}. \end{cases}$$

解之得 $$\begin{cases} S=0.2, \\ q=0.2. \end{cases} \tag{17}$$

由(14)即得 $$y=0.2+0.2=0.4\ . \tag{18}$$

这样由(13)，(18)式，可知若

$W=\{$由T和H组成的序列$|$其中不出现THT和$TTT\}$，

而 $w=P(W)$，

那末 $w=1-x-y=1-0.6-0.4=0$.

这样就证明了我们要得到的全部结论。

解法二 因为小孩每一次掷币只有2种可能：H或T，所以到掷了K次以后，可能的结局（即有K项的一个有限序列）总共有2^K种，而在这2^K种结局中，赌徒A赢的设为σ_k种，赌徒B赢的设为τ_k种。这样

$$\alpha_k=\frac{\sigma_k}{2^k} \tag{20}$$

即为小孩掷币K次后，赌徒A赢的比例；同样

$$\beta_k=\frac{\tau_k}{2^k} \tag{21}$$

为赌徒B赢的比例、而我们所要求的，显然是

$$\alpha=\lim_{k\to\infty}\alpha_k=\lim_{k\to\infty}\frac{\sigma_k}{2^k} \tag{22}$$

$$\beta=\lim_{k\to\infty}\beta_k=\lim_{k\to\infty}\frac{\tau_k}{2^k} \tag{23}$$

为此我们先要求出σ_k和τ_k。注意在小孩掷币K次后，赌徒A是赢的这种情况，不外乎是出现了以下这种情况：

第$k-2$、第$k-1$、第k次的掷币结果是分别T、H、T，而在$3\leqslant k'<k$时，第$k'-2$、第$k'-1$、第k'次的掷币结果不是TTT和THT，其中$3\leqslant k'\leqslant K$.

所以，如果我们把在掷币k次后，出现在第$k-2$、$k-1$、k次的结果分别是T、H、T，而在$3\leqslant k'<k$时，第$k'-2$、$k'-1$、k'次的掷币结果不是TTT和THT的这种k项有限序列的全体记为Ξ_k，而其个数记为ξ_k的话，那末显然有

$$\sigma_k=\xi_3\cdot 2^{k-3}+\xi_4\cdot 2^{k-4}+\cdots\cdots+\xi_{k-1}\cdot 2+\xi_k, \quad (24)$$

从而 $$\alpha_k=\frac{\xi_3}{2^3}+\frac{\xi_4}{2^4}+\cdots\cdots+\frac{\xi_{k-1}}{2^{k-1}}+\frac{\xi_k}{2^k}. \quad (25)$$

同样，如果我们把在掷币k次后，出现在第$k-2$、$k-1$、k次的结果分别是T、T、T，而在$3\leqslant k'<k$时，第$k'-2$、$k'-1$、k'次的掷币结果不是THT和TTT的这种k项有限序列的全体记为Σ_k，而其个数记为η_k的话，那末显然有

$$\tau_k=\eta_3\cdot{}^{k-3}+\eta_4\cdot 2^{k-4}+\cdots\cdots+\eta_{k-2}\cdot 2+\eta_k, \quad (26)$$

从而 $$\beta_k=\frac{\eta_3}{2^3}+\frac{\eta_4}{2^4}+\cdots\cdots+\frac{\eta_{k-1}}{2^{k-1}}+\frac{\eta_k}{2^k}. \quad (27)$$

所以，问题就归结为求ξ_k和η_k．我们先求ξ_k．为此我们将Ξ_k分为四类：

Ξ_k中第一、第二项是HH的序列，其全体记为A_k，其个数记为a_k；

Ξ_k中第一、第二项是TH的序列，其全体记为B_k，其个数记为b_k；

Ξ_k中第一、第二项是HT的序列，其全体记为C_k，其个数记为C_k；

Ξ_k中第一、第二项是TT的序列，其全体记为D_k，其个数记为d_k、

则有$\xi_k=a_k+b_k+c_k+d_k$、 (28)

为求得a_k、b_k、c_k、d_k的具体表达式，我们要研究集合Ξ_k与集合Ξ_{k+1}之间的关系．因为在Ξ_{k+1}中的序列，如果拿去第一项后

一定是Ξ_k中的序列，所以Ξ_{k+1}中的序列一定可以通过在Ξ_k中的序列再在其左端加上T或H（至于如何加法，以下就会详细研究）来得到、具体说来是：A_k中的序列左端加上H后，就成为A_{k+1}中的序列，左端加上T后，就成为B_{k+1}中的序列；B_k中的序列左端加上H后，就成为C_{k+1}中的序列，左端加上T后，就成为D_{k+1}中的序列；C_k中的序列左端加上H后，就成为A_{k+1}中的序列，（对C_k中的序列左端不能加上T而成为Ξ_{k+1}中的序列）；D_k中的序列左端加上H后，就成为C_{k+1}中的序列，（对D_k中的序列左端不能加上T而成为Ξ_{k+1}中的序列）。

以上的递归构造算法在表一中可以更直观地看到。

表一　　由Ξ_k生成Ξ_{k+1}的递归算法

加上去的第一项	Ξ_k中的序列	合成的结果
H	$HH\cdots\cdots THT\in A_k$	$HHH\cdots\cdots THT\in A_{k+1}$
T	$HH\cdots\cdots THT\in A_k$	$THH\cdots\cdots THT\in B_{k+1}$
H	$TH\cdots\cdots THT\in B_k$	$HTH\cdots\cdots THT\in C_{k+1}$
T	$TH\cdots\cdots THT\in B_k$	$TTH\cdots\cdots THT\in C_{k+1}$
H	$HT\cdots\cdots THT\in C_k$	$HHT\cdots\cdots THT\in A_{k+1}$
T	$HT\cdots\cdots THT\in C_k$	不属于Ξ_{k+1}
H	$TT\cdots\cdots THT\in D_k$	$HTT\cdots\cdots THT\in C_{k+1}$
T	$TT\cdots\cdots THT\in D_k$	不属于Ξ_{k+1}

此外从表一中可看出：由A_k生成的A_{k+1}中的序列和以C_k生成的A_{k+1}中的序列是彼此不同的；由B_k生成的C_{k+1}中的序列和由D_k生成的C_{k+1}中的序列也是彼此不同的。从以上算法中我们

得到$a_{k+1}, b_{k+1}, c_{k+1}, d_{k+1}$与$a_k$，$b_k$，$c_k$，$d_k$之间的递推关系

$$\begin{cases} a_{k+1} = a_k + c_k, \\ b_{k+1} = a_k, \\ c_{k+1} = b_k + d_k, \\ d_{k+1} = b_k, \end{cases} \quad k \geqslant 3. \tag{29}$$

此外因Ξ_3中仅一序列：THT.

所以有$a_3 = 0$，$b_3 = 1$，$c_3 = 0$，$d_3 = 0$. (30)

如果采用矩阵的记法，而我们令

$$F_k = \begin{bmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \\ d_k \end{bmatrix}, \qquad J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

那么由(28)，(29)和(30)式，得到

$$F_{k+1} = JF_k, \qquad k \geqslant 3, \tag{31}$$

$$F_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{32}$$

$$\xi_k = (1, 1, 1, 1)Fk. \tag{33}$$

这样累次运用(31)式，便可得到在$k \geqslant 3$时

$$F_k = JF_{k-1} = J^2 F_{k-2} = \cdots\cdots = J^{k-3} F_3,$$

即 $$F_k = J^{k-3} F_3, \qquad k \geqslant 3, \tag{34}$$

从而 $$\xi_k = (1, 1, 1, 1) J^{k-3} F_3, \qquad k \geqslant 3. \tag{35}$$

所以为了求ξ_k，只要求J^{k-3}.

而对于η_k如何呢？我们也将Σ_k中的序列分为四类：

Σ_k中第一、第二项是HH的序列，其全体记为A'_k，其个数记为a'_k；

Σ_k中第一、第二项是TH的序列，其全体记为B'_k，其个数记为b'_k；

Σ_k中第一、第二项是HT的序列，其全体记为C'_k，其个数记为C'_k；

Σ_k中第一、第二项是TT的序列，其全体记为D'_k，其个数记为d'_k。

这样就有$\eta_k = a'_k + b'_k + c'_k + d'_k$。　　(36)

为求得a'_k，b'_k，c'_k，d'_k的具体表达式，我们要研究集合Σ_k与集合Σ_{k+1}之间的关系。同样，在Σ_{k+1}中的序列，如果拿去第一项后一定是Σ_k中的序列，所以Σ_{k+1}中的序列一定可以通过在Σ_k中的序列再在其左端加上T或F（见体加法，待下就详细研究）来得到、具体说来是：A'_k中的序列左端加上H后，就成为A'_{k+1}中的序列，左端加上T后，就成为B'_{k+1}中的序列；B'_k中的序列左端加上H后，就成为C'_{k+1}中的序列，左端加上T后则成为

表二　　由Σ_k生成Σ_{k+1}的递归算法

加上去的第一项	Σ_k中的序列	合成的结果
H	$HH\cdots\cdots TTT \in A_k'$	$HHH\cdots\cdots TTT \in A'_{k+1}$
T	$HH\cdots\cdots TTT \in A_k'$	$THH\cdots\cdots TTT \in B'_{k+1}$
H	$TH\cdots\cdots TTT \in B_k'$	$HTH\cdots\cdots TTT \in C'_{k+1}$
T	$TH\cdots\cdots TTT \in B_k'$	$TTH\cdots\cdots TTT \in D'_{k+1}$
H	$HT\cdots\cdots TTT \in C_k'$	$HHT\cdots\cdots TTT \in A'_{k+1}$
T	$HT\cdots\cdots TTT \in C_k'$	不属于Σ_{k+1}
H	$TT\cdots\cdots TTT \in D_k'$	$HTT\cdots\cdots TTT \in C'_{k+1}$
T	$TT\cdots\cdots TTT \in D'$	不属于Σ_{k+1}

D'_{k+1}中的序列、C'_k中的序列左端加上H后，就成为A'_{k+1}中的序列，(对C'_k中的序列左端不能加上T而成为Σ_{k+1}中的序列)；D'_k中的序列左端加上H后，就成为C'_{k+1}中的序列，(对D'_k中的序列左端不能加上T而成为Σ_{k+1}中的序列)．

以上的递归构造算法在表二中可以更直观地看到。

此外从表二中可看出：由A'_k生成的A'_{k+1}中的序列和以C'_k生成的A'_{k+1}中的序列是彼此不同的；由B'_k生成的C'_{k+1}中的序列和由D'_k生成的C'_{k+1}中的序列也是彼此不同的．从以上算法中我们也得到了a'_{k+1}，b'_{k+1}，c'_{k+1}，d'_{k+1}与a'_k,b'_k,c'_k,d'_k之间的递推关系

$$\begin{cases} a'_{k+1} = a'_k + c'_k \ , \\ b'_{k+1} = a'_k \ , \\ c'_{k+1} = b'_k + d'_k \ , \\ d'_{k+1} = b'_k \ , \end{cases} \qquad k \geqslant 3 \text{．} \qquad (37)$$

此外因Σ_3中仅一序列：TTT．

所以有　$a'_3 = 0$，$b'_3 = 0$，$c'_3 = 0$，$d'_3 = 1$ ．　　(38)

如果采用矩阵的记法，而我们令

$$G_k = \begin{bmatrix} a'_k \\ b'_k \\ c'_k \\ d'_k \end{bmatrix},$$

那么由(36)，(37)和(38)式，得到

$$G_{k+1} = JG_k \ , \qquad k \geqslant 3 \text{，} \qquad (39)$$

$$G_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad (40)$$

$$\eta_k = (1, 1, 1, 1) G_k . \tag{41}$$

这样就有 $G_k = J^{k-3} G_3$,　　　$k \geqslant 3$,　　(42)

从而　$\eta_k = (1, 1, 1, 1) J^{k-3} G_3$,　　$k \geqslant 3$.　　(43)

往下我们为求出J^{k-3}而首先求出J的约当 (Jordan) 分解式,为此先要求出J的特征值,即求代数方程

$$|J - \lambda I| = \lambda^4 - \lambda^3 - \lambda - 1 = 0 \tag{44}$$

的根、方程式(44)即为

$$(\lambda^2 + 1)(\lambda^2 - \lambda - 1) = 0, \tag{45}$$

所以此方程有四个单根

$$\lambda_1 = i , \qquad \lambda_2 = -i ,$$

$$\lambda_3 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \lambda_4 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} . \tag{46}$$

对于每一个特征值λ_i, $1 \leqslant i \leqslant 4$, 再分别求其特征向量

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{pmatrix},$$

即如有 $J\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{pmatrix}$,

亦即 $\begin{cases} t_1 + t_3 = \lambda t_1 , \\ t_1 = \lambda t_2 . \\ t_2 + t_4 = \lambda t_3 , \\ t_2 = \lambda t_4 . \end{cases}$

若令　　　　$t_4 = 1$,

那么
$$\begin{cases} t_1 = \lambda^2, \\ t_2 = \lambda, \\ t_3 = (\lambda - 1)\lambda^2 \end{cases}.$$

所以可知：若λ是特征值，则

$$\begin{bmatrix} \lambda^2 \\ \lambda \\ (\lambda - 1)\lambda^2 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{47}$$

是与此特征征值相对应的一个特征向量，今用$\lambda = \lambda_1$，λ_2，λ_3，λ_4分别代入(47)式，就得到相应于每一个特征值λi的一个特征向量、将这些向量自左向右排列成一个4×4的矩阵L，即

$$L_1 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & \frac{3+\sqrt{5}}{2} & \frac{3-\sqrt{5}}{2} \\ i & -i & \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1-i & 1+i & \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{48}$$

因为
$$JL = L \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & 0 & \\ & 0 & \lambda_3 & \\ & & & \lambda_4 \end{bmatrix},$$

因此
$$J = L \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & 0 & \\ & 0 & \lambda_3 & \\ & & & \lambda_4 \end{bmatrix} L^{-1}, \tag{49}$$

其中L^{-1}为L的逆阵，我们可以L_1直接求得(我们另有一个不必

直接从L求L^{-1}的方法，这在评注二中介绍）

$$L^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{-2+i}{10} & \frac{1-3i}{10} & \frac{1+2i}{10} & \frac{2-i}{10} \\ \frac{-2-i}{10} & \frac{1+3i}{10} & \frac{1-2i}{10} & \frac{2+i}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{-1+\sqrt{5}}{10} & \frac{-1+\sqrt{5}}{10} & \frac{3-\sqrt{5}}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{-1-\sqrt{5}}{10} & \frac{-1-\sqrt{5}}{10} & \frac{3+\sqrt{5}}{10} \end{pmatrix}.$$

表达式(49)称为J的约当分解式，利用这个分解式，将它代入J^{k-3}，就有

$$J^{k-3}=L\begin{bmatrix} \lambda_1^{k-3} & & & \\ & \lambda_2^{k-3} & & 0 \\ 0 & & \lambda_3^{k-3} & \\ & & & \lambda_4^{k-3} \end{bmatrix}L^{-1},$$

因此在$k\geqslant 3$时，

$$\xi_k=(1,1,1,1)L_1\begin{bmatrix} \lambda_1^{k-3} & & & \\ & \lambda_2^{k-3} & & 0 \\ 0 & & \lambda_3^{k-3} & \\ & & & \lambda_4^{k-3} \end{bmatrix}L^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$=i^{k-3}\left(\frac{1-3i}{10}\right)+(-i)^{k-3}\left(\frac{1+3i}{10}\right)$$

$$+\left(\frac{7+3\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-3}+\left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-3},$$

经整理后，即得

$$\xi_k=\frac{2}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-3}+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-3}\right]+\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-3}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-3}\right]$$

$$+\begin{cases}\frac{1}{5}(-1)^{\frac{k+1}{2}}, & k\text{为奇数},\\ \frac{3}{5}(-1)^{\frac{k}{2}}, & k\text{为偶数},\end{cases}\qquad k\geqslant 3. \tag{50}$$

同样在$k\geqslant 3$时，也有

$$\eta_k=(1,1,1,1)L\begin{pmatrix}\lambda_1^{k-3} & & & 0\\ & \lambda_2^{k-3} & & \\ & & \lambda_3^{k-3} & \\ 0 & & & \lambda_4^{k-3}\end{pmatrix}L^{-1}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$=i^{k-3}\left(\frac{2-i}{10}\right)+(-i)^{k-3}\left(\frac{2+i}{10}\right)$$

$$+\left(\frac{7+3\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{3-\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-3}$$

$$+\left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{3+\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-3},$$

经整理后. 即得

$$\eta_k=\frac{3}{10}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-3}+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-3}\right]$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-3}\right]$$

$$+\begin{cases}\frac{2}{5}(-1)^{\frac{k+1}{2}}, & k\text{为奇数},\\ \frac{1}{5}(-1)^{\frac{k}{2}}, & k\text{为偶数},\end{cases}\quad k\geqslant 3。\tag{51}$$

因此 $$\alpha=\sum_{k=3}^{\infty}\frac{\xi_k}{2^k}$$

$$=\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\frac{1}{2^3}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^k$$

$$+\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\frac{1}{2^3}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^k$$

$$+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^{2k}}+\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2^4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^{2k}}$$

$$=\frac{11+5\sqrt{5}}{40}+\frac{11-5\sqrt{5}}{40}+\frac{1}{50}+\frac{3}{100}=0.6,$$

$$\beta=\sum_{k=3}^{\infty}\frac{\eta_k}{2_k}$$

$$=\frac{7+3\sqrt{5}}{40}+\frac{7-3\sqrt{5}}{40}+\frac{1}{25}+\frac{1}{100}=0.4。$$

这就完全得到了我们的结论

奥地利1981年数学竞赛题解

第 一 试

①**解** 我们首先注意如果一个平行四边形$ABCD$（见图一）的两边之长分别为d，e，而两对角线之长分别为f，g，那么有

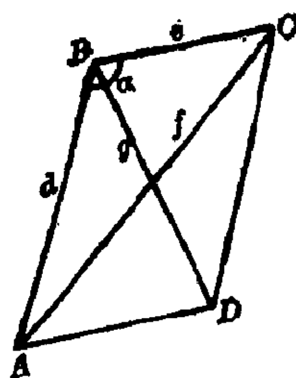
$$2(d^2+e^2)=f^2+g^2.$$

这是因为若令$\angle ABC=\alpha$，那么

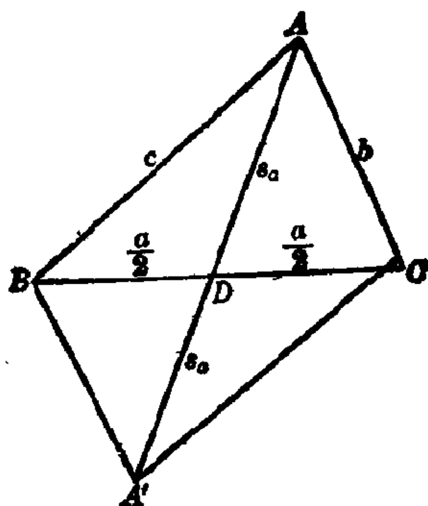
$$f^2=d^2+e^2-2de\cos\alpha, \tag{1}$$

而
$$g^2=d^2+e^2-2de\cos(\pi-\alpha)$$
$$=d^2+e^2+2de\cos\alpha. \tag{2}$$

(1)+(2) $$f^2+g^2=2(d^2+e^2). \tag{3}$$



图一



图二

现在在$\triangle ABC$中，若AD是BC边上的中线，那末将AD延长一倍至A'，那么四边形$ABA'C$是平行四边形（见图二），所据（3）式便有

$$a^2+(2s_a)^2=2(b^2+c^2),$$

所以
$$s_a{}^2=\frac{2b^2+2c^2-a^2}{4}. \tag{4}$$

同理便有
$$s_b{}^2=\frac{2c^2+2a^2-b^2}{4}, \tag{5}$$

$$s_c{}^2=\frac{2a^2+2b^2-c^2}{4}, \tag{6}$$

将(4)，(5)，(6)三式相加，便得

$$s_a^2+s_b^2+s_c^2=\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2).$$

因为 $s=\dfrac{a+b+c}{2}$,

而欲证之不等式为

$$s^2\leqslant s_a^2+s_b^2+s_c^2,$$

亦即为 $\left(\dfrac{a+b+c}{2}\right)^2\leqslant\dfrac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$,

整理后得 $ab+bc+ca\leqslant a^2+b^2+c^2.$ (7)

这是成立的，那是因为

$$\begin{cases}2ab\leqslant a^2+b^2, & (8)\\ 2bc\leqslant b^2+c^2, & (9)\\ 2ca\leqslant c^2+a^2, & (10)\end{cases}$$

再将(8)，(9)，(10)三式相加，便得(7)式，而(7)式中等号的成立，只有在(8)，(9)，(10)三式的等号都成立时才成立，而这意味着

$$a=b=c.$$

所以本题中欲证之不等式中的等号，当且仅当三角形是等边三角形时才成立。

②**解** 只要当自然数 n 不被3除尽时便有

$$(x^2+x+1)\,|\,[x^{2n}+1+(x+1)^{2n}] \qquad (1)$$

首先注意方程 $x^2+x+1=0$ (2)

的根为 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$

$$= \begin{cases} \dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}, \\ \dfrac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}, \end{cases}$$

其中 $i=\sqrt{-1}$．若我们记

$$\omega = \frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2},$$

则 $$\overline{\omega} = \frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}.$$

所以为了使 $(x^2+x+1)\mid[x^{2n}+1+(x+1)^{2n}]$

只要求 $\omega^{2n}+1+(\omega+1)^{2n}=0$ (3)

便够了，这是因为若（3）式成立，那么就意味着多项式

$$x^{2n}+1+(x+1)^{2n}$$

包含因子 $x-\omega$。

但因为（3）式成立时，

$$\overline{\omega}^{2n}+1+(\overline{\omega}+1)^{2n}=0 \qquad (4)$$

亦随之成立，其中 $\overline{\omega}$ 是 ω 的共轭数．而（4）式意味着多项式 $x^{2n}+1+(x+1)^{2n}$ 包含因子 $x-\overline{\omega}$。这样多项式 $x^{2n}+1+(x+1)^{2n}$ 就包含因子

$$(x-\omega)(x-\overline{\omega})=x^2+x+1,$$

也就是（1）式成立。

现在来考察 n 为何值时（2）式成立。注意

$$\omega+1=-\omega^2,$$

故（2）即为 $\omega^{2n}+1+(-\omega^2)^{2n}=0,$

亦即 $(\omega^{2n})^2+\omega^{2n}+1=0$,

这样便有 $\omega^{2n}=\omega$ (5)

或 $\omega^{2n}=\omega^2$。 (6)

这是因为方程(2)的根一为 ω，另一为 $\overline{\omega}$，但

$$\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3},$$

所以
$$\omega^2=\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^2$$

$$=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}$$

$$=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=\overline{\omega}.$$

在(5)式成立时，便有

$$\omega(\omega^{2n-1}-1)=0,$$

亦即 $\omega^{2n-1}-1=0$。 (7)

因为 $\omega\neq1$，$\omega^2\neq1$，$\omega^3=1$。

所以(7)式意味着

$$3\mid 2n-1,$$

亦即 $2n-1=3k$, (8)

其中 k 为自然数。因此

$$2n=2k+k+1,$$

$$n=k+\frac{k+1}{2},$$

所以 $(k+1)$ 必定是偶数，即

$$k+1=2k',$$

其中 k' 是自然数，这样(8)式便成为

$$2n-1=3(2k'-1),$$

即 $$n=3k'-1,\ k'\text{是自然数。} \tag{9}$$

在(6)式成立时，

$$\omega^2(\omega^{2n-2}-1)=0,$$

亦即 $$\omega^{2n-2}-1=0$$

因此 $$3\mid 2n-2,$$

亦即 $$2n-2=3l, \tag{10}$$

其中 l 是自然数，因此

$$n=l+1+\frac{l}{2},$$

所以 l 一定是偶然，即

$$l=2l',$$

其中l'是自然数，这样(10)式便成为

$$n=3l'+1,\qquad l'\text{是自然数。} \tag{11}$$

综合(9)与(11)式便知：只要 n 不被 3 除尽，(1)式便成立

③**解** (i) 第一步我们要证明不等式组

$$\begin{cases} ax_1+bx_2+cx_3 \geqslant 0, \\ \quad ax_2+bx_3+cx_4 \geqslant 0, \\ \quad\quad ax_3+bx_4+cx_5 \geqslant 0, \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \quad\quad\quad ax_{n-2}+bx_{n-1}+cx_n\geqslant 0, \\ cx_1 \quad\quad +ax_{n-1}+bx_n\geqslant 0, \\ bx_1+cx_2 \quad\quad +ax_n\geqslant 0, \end{cases} \tag{1}$$

是等价于方程组

$$\begin{cases} ax_1+bx_2+cx_3 & =0, \\ \quad ax_2+bx_3+cx_4 & =0, \\ \quad\quad ax_3+bx_4+cx_5 & =0, \quad (2) \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \quad\quad\quad ax_{n-2}+bx_{n-1}+cx_n & =0, \\ cx_1 \quad\quad +ax_{n-1}+bx_n & =0, \\ bx_1+cx_2 \quad\quad +ax_n & =0. \end{cases}$$

这是因为如果把不等式组(1)的前$(n-1)$个不等式相加，再充分利用系数a，b，c之间的关系

$$a+b+c=0, \tag{3}$$

则得 $(a+c)x_1+(b+a)x_2+(b+c)x_n\geqslant 0$,

亦即 $-bx_1-cx_2-ax_n\geqslant 0$,

此即为 $bx_1+cx_2+ax_n\leqslant 0$. $\quad (4)$

因此(4)式与(1)的最后一式相联立，便得

$$\begin{cases} bx_1+cx_2+ax_n\leqslant 0, \\ bx_1+cx_2+ax_n\geqslant 0. \end{cases} \tag{5}$$

所以只有 $bx_1+cx_2+ax_n=0$

才是不等式组(5)的解，因为不等式组(1)中$x_1,x_2,x_3,\cdots,x_{n-1}$，$x_n$是头尾相接循环排列的，所以可以重复应用以上的过程，从而得到方程组(2)中前$(n-1)$个等式。

(ii) 现在求解方程组(2)。我们将方程组(2)中的所有系数b均用 $b=-a-c$

来替代。这样第一个方程便成为

$$ax_1-(a+c)x_2+cx_3=0,$$

亦即是 $a(x_1-x_2)=c(x_2-x_3)$.

同样第二个方程成为

$$a(x_2-x_3)=c(x_3-x_4).$$

依次类推，我们得到一个与方程组(2)等价的方程组(6)，那就是

$$\begin{cases} a(x_1-x_2)=c(x_2-x_3), \\ a(x_2-x_3)=c(x_3-x_4), \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a(x_{n-1}-x_n)=c(x_n-x_1), \\ a(x_n-x_1)=c(x_1-x_2). \end{cases} \tag{6}$$

注意我们可从方程组(6)得到

$$a^n(x_1-x_2)=c^n(x_1-x_2). \tag{7}$$

那是因为

$$\begin{aligned} a^n(x_1-x_2) &= a^{n-1}\cdot a(x_1-x_2)=a^{n-1}c(x_2-x_3) \\ &= ca^{n-2}\cdot a(x_2-x_3)=c^2a^{n-2}(x_3-x_4) \\ &\cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ &= c^{n-1}\cdot a(x_n-x_1)=c^n(x_1-x_2). \end{aligned}$$

因此如果　$a^n \neq c^n$,　(8)

那么从(7)式便得　$x_1=x_2$。

同样从方程组(6)可得

$$a^n(x_2-x_3)=c^n(x_2-x_3), \quad \cdots\cdots,$$

$$a^n(x_n-x_1)=c^n(x_n-x_1),$$

因而便得$x_1=x_2=x_3=\cdots\cdots=x_n$。　(9)

如果(8)式不满足，那末便有

$$a^n=c^n. \tag{10}$$

因为a与c皆为实数，因此从(10)式只能得到

$$a=c \tag{11}$$

或当n为偶数时，$a=-c$。　(12)

在(11)式成立时，若

$$a=c=0, \tag{13}$$

那么　$b=0$,　(14)

这样向量$(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n)$
的各分量取任意值都能满足原不等式组(1)。如果

$$a=c\neq 0, \tag{15}$$

那么方程组(6)便成为

$$x_1-x_2=x_2-x_3=\cdots\cdots=x_n-x_1. \tag{16}$$

所以若设 $x_1-x_2=x_2-x_3=\cdots\cdots=x_n-x_1=h,$

那么从 $x_1-x_2=h,$

便得 $x_2=x_1-h;$

再从 $x_2-x_3=h,$

便得 $x_3=x_2-h=x_1-2h;$

因此得

$$\begin{cases} x_2=x_1-h, \\ x_3=x_1-2h, \\ x_n=x_1-(n-1)h, \\ x_1=x_1-nh. \end{cases} \tag{17}$$

从上述方程组的最后一式便得 $h=0$.

因此方程组(16)便成为 $x_1=x_2=x_3=\cdots=x_n.$ (9)

再若(12)式成立，那么从(3)式便得 $b=0$.

所以如果 $a=-c=0,$

那么又是向量 $(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_{n-1}, x_n)$
的各分量取任意值都能满足原不等式组(1)。如果

$$a=-c\neq 0,$$

那么方程组(6)便成为

$$\begin{cases} x_1=x_3, \\ x_2=x_4, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{n-1}=x_1, \\ x_n=x_2. \end{cases} \tag{18}$$

因为此时n为偶数，所有方程组(8)便成为

$$\begin{cases} x_1 = x_3 = \cdots\cdots = x_{n-1}, \\ x_2 = x_4 = \cdots\cdots = x_n. \end{cases} \tag{19}$$

总结以上所述，我们便得到：在$a=b=c=0$时，不等式组(1)的解是整个n维空间；在$b=0$和$a=-c\neq 0$和n为偶数时，不等式组(1)的解是$x_1=x_3=\cdots=x_{n-1}$，$x_2=x_4=\cdots=x_n$；在其它所有情况下，不等式组(1)的解为

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \cdots = x_{n-1} = x_n.$$

第 二 试

④**解** 我们先考察数列

$$a_n' = [\sqrt{n}].$$

注意当 $n=k^2,\ k^2+1,\ k^2+2,\ \cdots,\ k^2+2k$
时，均有$a_n'=k$。

因此

$$\begin{cases} a_1' = a_2' = a_3' = 1 \\ a_4' = a_5' = a_6' = a_7' = a_8' = 2, \\ a_9' = a_{10}' = a_{11}' = a_{12}' = a_{13}' = a_{14}' = a_{15}' = 3, \\ \cdots\cdots \qquad \cdots\cdots \qquad \cdots\cdots \\ a'_{k^2} = a'_{k^2+1} = \cdots\cdots = a'_{k^2+2k} = k, \\ \cdots\cdots \qquad \cdots\cdots \qquad \cdots\cdots \end{cases}$$

有了这样的感性认识后，我们就容易找到数列a_n中需要寻找的整数b，c，d之值了。其实

$$a_n = 2[\sqrt{n-1}] + 1,$$

所以 $b=2,\ c=-1,\ d=1$。

下面我们要证明上述b，c，d取值的唯一性。

即若 $$b[\sqrt{n+c}] + d = 2[\sqrt{n-1}] + 1, \tag{1}$$

那么将$n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$代入(1)式便得

$$\begin{cases} b[\sqrt{1+c}]+d=1, \\ b[\sqrt{2+c}]+d=3, \\ b[\sqrt{3+c}]+d=3, \\ b[\sqrt{4+c}]+d=3, \\ b[\sqrt{5+c}]+d=5. \end{cases} \tag{2}$$

从前述对函数$[\sqrt{n}]$的讨论可知，一定有：

$2+c$是一个平方数，$5+c$亦是一个平方数。

因此一定存在非负整数 e，使

$$\begin{cases} 2+c=e^2, & (3) \\ 5+c=(e+1)^2. & (4) \end{cases}$$

这样从(3)，(4)两式中消去 c，便得

$$3=2e+1,$$

示即 $\quad e=1$。 (5)

将（5）式代回（3）式，便得$C=-1$。

则（1）成为 $\quad (b-2)[\sqrt{n-1}]=1-d.$ (6)

这样若 $b-2>0$，那么

$$1-d=\lim_{n\to\infty}(b-2)[\sqrt{n-1}]=+\infty.$$

因此得出矛盾；若$b-2<0$，那么

$$1-d=\lim_{n\to\infty}(b-2)[\sqrt{n-1}]=-\infty.$$

亦得出矛盾，所以只有$b-2=0$。

这样从（6）式又得到$1-d=0$。

所以 $\quad b=2$，$d=1$。

因此对 b，c，d，只能取$b=2$，$c=-1$，$d=1$。

这就证明了唯一性。

⑤**解** 首先注意

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

所以 $\sum_{i=1}^{n} i^2 \Big| n!$ (1)

就等价于 $(n+1)(2n+1) \Big| 6(n-1)!$。 (2)

再因为 $(n+1, 2n+1) = 1$。 (3)

那是因若 $n+1 = AB, 2n+1 = AC,$ (4)

其中A, B, C都是自然数，(4) 式表示$n+1$与$2n+1$有公因子A，那么从(4) 式便得

$$2n+2 = 2AB,$$

从而 $1 = 2n+2-(2n+1) = 2AB - AC = A(2B-C),$

因此 $A = 1$。

所以 (3)式成立，因此 (2) 式就等价于

$$(n+1) \mid 6(n-1)! \quad (5)$$

与 $$(2n+1) \mid 6(n-1)! \quad (6)$$

我们先考察(5)式、首先我们将$(n+1)$进行标准因子分解，

即 $n+1 = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$。 (7)

其中 $p_1, \cdots, p_k$是互不相同的素数，而$\alpha_1, \cdots, \alpha_k$是自然数，如果在(7)式中 $k \geqslant 2$，即$n+1$至少包含两个不同的素因子，那么此时一定可以把$n+1$表示为

$n+1 = D \cdot E$。 (8)

其中 D, E为$\geqslant 2$的自然数，而且$D \neq E$。 (9)

如果在(7)式中 $k = 1$，即

$$n+1=p^{\alpha}.$$

但若$\alpha\geqslant3$，那么表达式(8)仍成立，而且限制条件(9)仍成立。而在$\alpha=2$或$\alpha=1$时，我们就相应有

$$n+1=(\text{素数})^2, \qquad (10)$$

$$n+1=\text{素数}. \qquad (11)$$

因此我们可以把以上的讨论归结为：$n+1$必定下列三种互不相容的情况之一，那就是

(i) $n+1=\text{素数}$； (11)

(ii) $n+1=(\text{素数})^2$； (10)

(iii) $n+1=D\cdot E$。 (8)

其中 D，E为$\geqslant2$的自然数，而且$D\neq E$。 (9)

下面我们要按上述所分的(i)，(ii)，(iii)三种情况分别讨论（5）式。

(i) 当$n+1=$素数时，而且$n\geqslant3$时，一定有

$$(n+1\times6(n-1)!. \qquad (12)$$

那是因为 $n+1\times(n-1!$.

再因为 $n+1\geqslant4$，而且$n+1$为素数，所以

$$n+1\times6.$$

因此(12)式成立

(ii) 当 $n+1=Q^2$，而Q为素数时，我们要证明，在$n\geqslant4$时有

$$2Q\leqslant n-1. \qquad (13)$$

那是因若 $2Q\geqslant n$.

那么 $Q\geqslant\dfrac{n}{2}$.

因此 $n+1=Q^2\geqslant\dfrac{n^2}{4}$.

从而　　　$0\geqslant n^2-4n-4$。

亦即　　　$8\geqslant(n-2)^2$。

即　　　　$4\geqslant n$。

但在$n=4$时，$n+1=5\neq$(素数)^2. 因此(13)式在$n\geqslant4$时成立、既然(13)式成立，因此更有

$$Q<2Q\leqslant n-1.$$

因此　　　$(n-1)!=1\cdot2\cdots\cdot Q\cdot\cdots\cdot2Q\cdot\cdots(n-1)$,

所以　　　$(n+1)=Q^2\mid 6(n-1)!$。

而在$n\leqslant3$时，只有$n=3$时，$n+1=4=2^2$，而此时

$$n+1=2^2\mid 6\cdot(3-1)!=6\cdot2,$$

所以只要　$n+1=$(素数)^2，便有(5)式成立。

(iii)　当$n+1=D\cdot E$，而且D,E为$\geqslant2$的自然数，而且$D\neq E$时，我们要证明

$$D,E\leqslant n-1. \tag{14}$$

那是因为若D, E中某一，例如D，有 $D\geqslant n$. 那么因为$E\geqslant2$，因此一定有

$$n+1=D\cdot E\geqslant n\cdot2,$$

从而　　　$1\geqslant n$。

但在$n=1$时，$n+1=2=$素数，是属于情况(i)的. 所以我们知道(14)式成立。因为$D\neq E$，不失一般性，我们可设 $D<E$，因此

$$(n-1)!=1\cdot2\cdots\cdot D\cdot\cdots\cdot E\cdot\cdots(n-1).$$

所以　　　$(n+1)\mid(n-1)!$，

因此可知：在本情况(iii)之下，(5)式一定成立。

综合以上讨论便知：当而且只有当$n=1,2$或 $n\geqslant3$但$n+1$

$\neq$素数时，(5)式才成立。

现在来考察(6)式。与以上的讨论相仿，我们可以分以下三种情况来讨论之：

$$\text{(i)}\quad 2n+1=\text{素数};\tag{15}$$

$$\text{(ii)}\quad 2n+1=(\text{素数})^2;\tag{16}$$

$$\text{(iii)}\quad 2n+1=D\cdot E.\tag{17}$$

其中 $\qquad D,E$为$\geqslant 2$的自然数，而且$D\neq E$。 (18)

（Ⅰ） 在$2n+1=$素数，而且$n\geqslant 2$时，一定有

$$(2n+1)\nmid 6(n-1)!.$$

那是因为 $(2n+1)$为素数，所以

$$(2n+1)\nmid (n-1)!.$$

再因为$n\geqslant 2$，故$2n+1\geqslant 5$。而$2n+1=5,\ 7,\cdots\cdots$

所以 $\qquad (2n+1)\nmid 6$。

因此 $\qquad (2n+1)\nmid 6(n-1)!$

（Ⅱ） 当 $2n+1=Q^2$，而Q为素数时，而且$n\geqslant 9$时，一定有 $\qquad 2Q\leqslant n-1$。 (19)

那是因为若 $2Q\geqslant n$，那么

$$2n+1=Q^2\geqslant\frac{n^2}{4}.$$

从而 $\qquad 0\geqslant n^2-8n-4$。

亦即 $\qquad 20\geqslant (n-4)^2$。

亦即 $\qquad 8\geqslant n$。

而这与假设$n\geqslant 9$是矛盾的。因此

$$(n-1)!=1\cdot 2\cdots\ Q\cdot\cdots\cdot(2Q)\cdot\cdots(n-1),$$

所以 $\qquad 2n+1=Q^2\mid (n-1)!$。

亦即(6)式成立。而在$n\leqslant 8$时，只有$n=4$时 $2n+1=9=3^2$，是

属于本情况的，而此时

$$2n+1=g=3^2 \mid 6\cdot 3!,$$

所以只要 $2n+1=(\text{素数})^2$，便有(6)式成立。

(iii) 当$2n+1=D\cdot E$，而D, E为$\geqslant 2$的自然数，而且$D\neq E$时，我们要证明

$$D, E\leqslant n-1 \tag{20}$$

那是若D, E之一，例如D，有$D\geqslant n+1$，那么因为$E\geqslant 2$，那样便有

$$2n+1=D\cdot E\geqslant (n+1)\cdot 2,$$

因此便产生了矛盾。所以一定有

$$D, E\leqslant n.$$

但当D, E之一，例如D，有$D=n$时，那么

$$2n+1=n\cdot E,$$

这样$E\neq 2$，而且E也不能$\geqslant 3$。若$E\geqslant 3$，那么

$$2n+1\geqslant 3n,$$

因而$n=1=D$，从而与$D\geqslant 2$矛盾，因此只能有

$$D, E\leqslant n-1. \tag{20}$$

因为$D\neq E$，因此不失一般性，可设$D<E$。这样

$$(n-1)!=1\cdot 2\cdots\cdot D\cdot\cdots\cdot E\cdot\cdots(n-1).$$

因此 $$(2n+1)\mid (n-1)!$$

因此可知：在本情况(iii)之下，(6)式一定成立。

综合以上讨论便知：当而且只有当$n=1$或$n\geqslant 2$但$2n+1\neq$素数时，(6)式才成立。

因此综合对(5)与(6)式的讨论可知，当而且只有当$n=1$或$n\geqslant 2$时但$n+1$与$2n+1$都不是素数时，有

表一

n	$n+1$	$2n+1$	$\sum_{i=1}^{n} i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$	$n!$	
1	2	3	1	1	√
2	3	5	5	2	
3	4 √	7	2·7	3!	
4	5	9 √	2·3·5	4!	
5	6 √	11	5·11	5!	
6	7	13	7·13	6!	
7	8 √	15 √	4·5·7	7!	√
8	9 √	17	3·4·17	8!	
9	10 √	19	3·5·19	9!	
10	11	21 √	5·7·11	10!	
11	12 √	23	2·11·23	11!	
12	13	25 √	2·13·25	12!	
13	14 √	27 √	7·9·13	13!	√
14	15 √	29	5·7·29	14!	
15	16 √	31	5·8·31	15!	
16	17	33 √	8·11·17	16!	
17	18 √	35 √	3·17·35	17!	√
18	19	37	3·19·37	18!	
19	20 √	39 √	10·13·19	19!	√
20	21 √	41	7·10·41	20!	

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 \mid n!. \tag{1}$$

下面我们用表一列出了 $n\leqslant 20$ 时 $\sum_{i=1}^{n} i^2$ 能否除尽$n!$ 的情况，

以及$(n+1)$与$(2n+1)$是否为素数的情况。在表一的$n+1$与$2n+1$栏中，我们用√标出该数不是一个素数，而在最后一栏用√标出$\sum_{i=1}^{n} i^2$是能够除尽$n!$的。注意在$n\geqslant 2$时当且仅当当前两栏都出现√时，最后一栏才出现√。

⑥**解** 原方程组为

$$\begin{cases} x^2-3xy+3y^2 \qquad -z^2=31, & (1)\\ -x^2 \qquad\qquad +6yz+2z^2=44, & (2)\\ x^2 \;+xy \qquad\qquad +8z^2=100. & (3)\end{cases}$$

利用方程(1)和(3)可以消去xy项，从而得到只包含x^2，y^2，z^2项的方程

$$4x^2+3y^2+23z^2=331. \qquad (4)$$

这样我们便得到

$$4x^2\leqslant 331,\quad 3y\leqslant 331,\quad 23z^2\leqslant 331,$$

从而 $$x^2\leqslant\frac{331}{4}=82.75,$$

$$y^2\leqslant\frac{331}{3}=110.33\cdots\cdots,$$

$$z^2\leqslant\frac{331}{23}=14.3913\cdots\cdots.$$

从而 $$|x|\leqslant\sqrt{82.75}=9.0967\cdots\cdots.$$

因为x是整数，所以

$$|x|\leqslant g. \qquad (5)$$

同理因 $$|y|\leqslant\sqrt{110.33\cdots}=10.5039\cdots\cdots,$$

故 $$|y|\leqslant 10; \qquad (6)$$

因 $$|z|\leqslant\sqrt{14.3913}=3.7935\cdots\cdots.$$

故 $|z|\leqslant 3$。

再从方程(2)我们得到

$$y=\frac{44-2z^2+x^2}{6z}, \tag{7}$$

往下我们就从$|z|=0,1,2,3$ 这四种情况来讨论这方程组。

(i) $z=0$。这样从(2)便得

$$-x^2=44,$$

而这是不可能的，所以$z=0$是不可能的。

(ii) $|z|=1$。这样把$z=\pm 1$代入(7)，便得

$$y=\frac{44-2+x^2}{\pm 6}=\frac{42+x^2}{\pm 6}=\pm 7\pm\frac{x^2}{6} \tag{8}$$

因为y是整数，所以从(8)式便知：

$\frac{x^2}{6}$是整数。

因为 $6=2\cdot 3$

所以x^2必定要包含因子 2 和 3，因此x也必定要包含因子2和3，亦即x要包含因子 6．但从(5)式知，只能是$x=0$ 或 $|x|=6$。在$x=0$时，$y=\pm 7$，这样把

$$x=0,\ y=\pm 7,\ z=\pm 1$$

代入方程(3)、便得到矛盾。在$|x|=6$时，从(8)式便得

$$y=\pm 7\pm\frac{36}{6}=\pm 7\pm 6=\pm 3.$$

这样将 $|x|=6$，$y=\pm 3$，$z=\pm 1$

代入(3)得 $36\pm 18+8=100$。

而也是矛盾的。所以$|z|=1$总不可能。

(iii) $|z|=2$。这样将$z=\pm 2$代入(7)式，便得到

$$y=\frac{44-8+x^2}{\pm 12}=\frac{36+x^2}{\pm 12}=\pm 3\pm\frac{x^2}{12}.$$

与前相仿，我们可知x^2必定要包含因子6。所以也只可能是$x=0$或$|x|=6$。而$x=0$，$|z|=2$代入方程(3)便得矛盾。而$|x|=6$时，

$$y=\pm 3\pm\frac{36}{12}=\pm 6.$$

这样将　　$|x|=6$，$y=\pm 6$，$z=\pm 2$

代入(3)得　　$36\pm 36+32=100$。

而这是矛盾的。所以$|z|=2$不可能。

(iV)　$|z|=3$。将$z=\pm 3$代入(7)式，便得到

$$y=\frac{44-18+x^2}{\pm 18}=\frac{26+x^2}{\pm 18}. \tag{9}$$

从(9)得到　　$x^2=2(\pm 9y-13)$。

因此x一定要包含因子2。再结合(5)式，便知

$$|x|=0,2,4,6,8.$$

这样相应的y值分别为

$$y=\frac{26}{\pm 18},\ \frac{30}{\pm 18},\ \frac{42}{\pm 18},\ \frac{62}{\pm 18},\ \frac{90}{\pm 18}.$$

因为y是整数，所以只能取

$$y=\frac{90}{\pm 18}=\pm 5.$$

这样将　　$|x|=8$，$y=\pm 5$，$|z|=\pm 5$

代入方程(3)。便得　$64\pm 40+200=100$。

而这是矛盾的。所以$|z|=3$不可能。

　　这样便知本题的方程组无整数解。